REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201932352, 11 Maret 2019
Pencipta		
Nama	:	**Dr. Suryo Widodo, M.Pd, Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd,**
Alamat	:	Dusun Kerep RT/RW : 004/001 Desa Kerep, Kecamatan Tarokan, , Kabupaten Kediri, Jawa Timur, 64152
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Universitas Nusantara PGRI Kediri**
Alamat	:	Jl. KH. Achmad Dahlan No 76 Mojoroto,, Kota Kediri, Jawa Timur, 64112
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Pengantar Dasar Matematika**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	5 Mei 2017, di Kota Kediri
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak Ciptaan tersebut pertama kali dilakukan Pengumuman.
Nomor pencatatan	:	000137085

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

YAYASAN PEMBINA LEMBAGA PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI PGRI KEDIRI
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
Status "Terakreditasi"
SK. BAN PT No: 1042/SK/BAN-PT/Akred/PT/VI/2016 Tanggal. 17 Juni 2016
Jl. K.H. Achmad Dahlan No. 76 Telp : (0354) 771576, 771503, 771495 Kediri

SURAT TUGAS

Nomor: 2014/C/FKIP-UN PGRI/II/2017

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dr. Hj. SRI PANCA SETYAWATI, M.Pd.
NIDN	: 0716046202
Pangkat/Gol. Ruang	: Penata Muda Tk. I / IIIb
Jabatan Fungsional	: Asisten Ahli
Jabatan	: Dekan FKIP
Unit Kerja	: Universitas Nusantara PGRI Kediri

memberikan tugas kepada:

1.	Nama	: Dr. Suryo Widodo, M.Pd.
	NIDN	: 0002026403
	Pangkat/Gol. Ruang	: Pembina / IVa
	Jabatan Fungsional	: Lektor Kepala
	Unit Kerja	: Universitas Nusantara PGRI Kediri
2.	Nama	: Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd.
	NIDN	: 0707067003
	Pangkat/Gol. Ruang	: Penata / IIIc
	Jabatan Fungsional	: Lektor
	Unit Kerja	: Universitas Nusantara PGRI Kediri

untuk membuat buku ajar mata kuliah Pengantar Dasar Matematika pada Semester Genap Tahun Akademik 2016/2017.

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dilaksanakan dengan penuh tanggung jawab. Atas perhatian dan kerjasamanya disampaikan terimakasih.

Kediri, 10 Februari 2017
Dekan,

Dr. Hj. SRI PANCA SETYAWATI, M.Pd

Pengantar
Dasar Matematika

By:
Suryo Widodo
Yuni Katminingsih

FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI
KEDIRI

Suryo Widodo
Pengantar Dasar Matematika/ SuryoWidodo, Yuni Katminingsih
Kediri: Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri, 2017. viii,
165 hlm.; bib.; il.; in.; 26 cm

ISBN: 978-602-61393-1-3

1. MATEMATIKA
I. Judul II. Yuni Katminingsih

Pengantar
Dasar Matematika

By:
Suryo Widodo
Yuni Katminingsih

FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI

Pengantar Dasar Matematika

Penulis:
1. Dr. Suryo Widodo, M.Pd.

2. Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd.

ISBN: 978-602-61393-1-3

Penelaah:
Dr. Muniri. M.Pd.

Ilustrator:
Abu Bakar, S.Pd.

Suryo Widodo, lahir tahun 1964, di Kediri Jawa Timur. Mengenyam pendidikan tinggi: S-1 program studi pendidikan matematika IKIP PGRI Kediri (1988), S-2 program studi pendidikan matematika IKIP Negeri Surabaya (1999), dan S-3 program studi pendidikan matematika Unesa Surabaya (2015).

Menjadi guru di SMA Sekartaji Plosoklaten Kediri (1986-1991); Menjadi dosen Universitas Nusantara PGRI Kediri (dahulu IKIP PGRI Kediri) sejak 1988 sampai sekarang, dengan jabatan akademik Lektor Kepala. Menjadi asesor sertifikasi guru (2007-2012) Rayon 43 UNP Kediri. Instruktur Nasional Kurikulum tahun 2013. Menjabat sebagai Sekretaris jurusan pendidikan matematika IKIP PGRI Kediri (1988-1996); Ketua jurusan pendidikan matematika IKIP PGRI Kediri (1996); Ketua Sekolah Tinggi Teknik PGRI Kediri (2001-2007); Dekan Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri (2007-2011; 2015-2019).

Yuni Katminingsih, lahir tahun 1970, di Kediri Jawa Timur. Pendidikan tinggi: S-1 Program Studi Pendidikan Matematika IKIP PGRI Kediri (1993), S-2 Teknologi Pembelajaran Unipa Surabaya (2007).
Pekerjaan: Guru SMP Negeri Tarokan 1 (1993-2000), guru SD Negeri Kerep (2001-2007), dosen UNP Kediri sejak 2007 sampai sekarang.

Buku ini terdiri dari tiga bagian utama yaitu, aksiomatika, logika elementer dan teori himpunan. Tiga bahasan tersebut yang akan menjembatani konsep-konsep pada mata kuliah lain untuk program studi matematika. Mata kuliah ini sebagai prasyarat mengikuti matakuliah aljabar abstrak dan analisis real. Aksiomatika membahas metode deduktif dan struktur aksioma dalam matematika. Diantaranya sistem aksioma, mendefinisikan suatu konsep dalam matematika, unsur-unsur yang membentuk teorema. Logika membahas cara menurunkan kesimpulan, memeriksa validitas suatu argumen dan metode pembuktian. Teori himpunan membahas pengertian himpunan klasik dan beberapa konsep dasar matematika, diantaranya relasi dan fungsi, kardinalitas, dan himpunan terurut parsial. Bab terakhir membahas aksioma dan paradox dalam matematika.

9 786026 139313
TEC-IT.COM

KATA PENGANTAR

Dengan rasa syukur alhamdulillah, akhirnya saya dapat menyelesaikan buku kuliah ini dalam bentuk buku ajar.

Buku ini disusun sebagai sarana untuk membantu mahasiswa dalam mata kuliah Pengantar Dasar Matematika, selain itu buku ini dapat memperkaya buku-buku dalam bidang matematika yang masih langka dijumpai.

Buku ini terdiri dari tiga bagian utama yaitu, aksiomatika, logika elementer dan teori himpunan. Tiga bahasan tersebut yang akan menjembatani konsep-konsep pada mata kuliah lain untuk program studi matematika. Mata kuliah ini sebagai prasyarat mengikuti matakuliah aljabar abstrak dan analisis real. Aksiomatika membahas metode deduktif dan struktur aksioma dalam matematika. Diantaranya sistem aksioma, mendefinisikan suatu konsep dalam matematika, unsur-unsur yang membentuk teorema. Logika membahas cara menurunkan kesimpulan, memeriksa validitas suatu argumen dan metode pembuktian. Teori himpunan membahas pengertian himpunan klasik dan beberapa konsep dasar matematika, diantaranya relasi dan fungsi, kardinalitas, dan himpunan terurut parsial. Bab terakhir membahas aksioma dan paradox dalam matematika.

Teristimewa saya sampaikan kepada Bapak Prof. Ketut Budayasa, Ph.D dan Dr. Agung Lukito, M.Si, yang telah banyak memberikan motivasi dan dorongan untuk menyelesaikan buku ini, untuk itu saya ucapkan terimakasih.

Demikian buku ajar ini disusun semoga dapat memperluas dan memperkaya pengetahuan kita dalam bidang matematika. Akhirnya tiada gading yang tak retak, semoga kritik dan saran pembaca dapat menyempurnakan buku ini.

Mei - 2017

Suryo Widodo

Yuni Katminingsih

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Matematika dan Matematika Sekolah

Sebelum membicarakan tentang matematika sekolah ada baiknya perlu dibahas terlebih dahulu apa yang dimaksud matematika itu. Telah banyak para pakar yang mendefinisikan “matematika” secara implisit namun sampai sekarang belum ada satu definisipun secara eksplisit dan baku.

Seperti yang dikemukakan oleh Galileo (1638) bahwa alam semesta ditulis dalam bahasa matematika dan abjatnya terdiri atas segitiga, lingkaran, dan bangun geometri lainnya (Naga DS, 1984: 258). Selanjutnya Soedjadi (1985) mempertegas bahwa matematika mempunyai objek abstrak beserta beberapa simbol serta gambaran-gambaran sebagai hasil abstraksi dan idealisasi, dewasa ini telah dipandang sebagai alat penata nalar, alat komputasi, alat komunikasi. Sebagai alat komunikasi, matematika merupakan kunci pembuka tabir rahasia alam.

Fehr (1967) mengatakan bahwa "Bagi dunia ke ilmuan, matematika juga berperan sebagai bahasa simbolik yang memungkinkan terwujudnya komunikasi secara cermat dan tepat. Matematika dalam hubungannya dengan komunikasi ilmiah mempunyai peranan ganda, yaitu sebagai ratu sekaligus melayani ilmu" (Darwis, 1994).

Jadi julukan matematika sebagai ratu dan pelayan ilmu, berarti matematika memiliki dua makna, yaitu (1) matematika sebagai alat bantu dalam mempelajari ilmu pengetahuan yang lain (dalam pengertian matematika sebagai pelayan), dan (2) matematika tidak bergantung kepada ilmu lain untuk berkembang, sebab matematika sebagai ilmu deduktif sehingga kebenarannya didasarkan kepada kebenaran pernyataan yang mendahuluinya, (dalam arti matematika sebagai ratu).

Namun demikian untuk memudahkan dalam mengenal matematika secara dekat, maka dapat dilihat definisi yang dikemukan Dajono (1976: 10), yaitu:

Ada tiga pengertian elementer matematika sebagai berikut:

a. Matematika sebagai ilmu pengetahuan tentang bilangan dan ruang.
b. Matematika sebagai studi ilmu pengetahuan tentang klasifikasi dan konstruksi berbagai struktur dan pola yang dapat di imajinasikan.
c. Matematika sebagai kegiatan yang dilakukan oleh para matematisi.

Soedjadi (1985: 1) menyatakan bahwa "Tidak mengherankan kalau ada pihak yang mendefinisikan matematika sebagai ilmu yang mempelajari struktur dan pola". Sedangkan di lain pihak mengatakan bahwa matematika adalah ilmu yang mempelajari bagian abstrak dan lainnya. Selanjutnya Soedjadi (1985: 1) mempertegas kembali bahwa: Meskipun terdapat berbagai pandapat yang nampak berlainan itu, tetap dapat ditarik ciri-ciri yang sama, antara lain ialah :

1. Matematika memiliki objek kajian yang abstrak
2. Matematika mendasarkan diri kesepakatan-kesepakatan
3. Matematika menggunakan sepenuhnya pola pikir deduktif
4. Matematika dijiwai dengan kebenaran konsisten.

Matematika sebagai salah satu ilmu dasar, baik aspek terapannya maupun aspek penalarannya, mempunyai peranan penting dalam upaya menguasai ilmu dan teknologi (Sukahar : 1996). Perkembangan matematika sangat menopang kemajuan sain dan teknologi. Matematika sebagai ilmu memiliki empat obyek dasar yaitu fakta, konsep, operasi dan prinsip. Pengembangan matematika menggunakan pola pikir deduktif-aksiomatik.

Di lain pihak, matematika perlu dikuasai oleh segenap warga negara Indonesia, baik menyangkut terapannya maupun pola pikirnya. Matematika demikian itu yang disebut matematika sekolah. Sehingga mustahil untuk memasukkan semua unsur perkembangan matematika serta sain ke dalam kurikulum sekolah. Jadi perlu dipilih dengan cermat untuk memasukkan unsur-unsur perkembangan sain dan teknologi kedalam sekolah.

Menurut Soedjadi (1995) matematika sekolah adalah unsur-unsur atau bagian-bagian matematika yang dipilih berdasar dan berorientasi kepada ....

(1) makna kependidikan, yaitu untuk mengembangkan kemampuan dan kepribadian peserta didik.
(2) tuntutan perkembangan yang nyata dari lingkungan hidup yang senantiasa berkembang seiring dengan kemajuan ilmu dan teknologi.

Hal ini sesuai yang dikatakan Sukahar (1997: 8) bahwa matematika sekolah merupakan bagian dari matematika yang dipilih atas dasar kepentingan pengembangan kemampuan intelektual dan kepribadian siswa serta perkembangan ilmu dan tehnologi, dan mengantisipasi masa depan.

1.2 Objek-Objek Matematika

Objek matematika oleh Bell dibedakan atas dua tipe, yaitu objek langsung dan objek tidak langsung. Objek langsung berupa fakta, skill, konsep dan prinsip. Sedangkan objek tak langsung adalah hal-hal yang mempengaruhi hasil belajar, misalnya kemampuan memecahkan masalah, mentransfer pengetahuan dan disiplin pribadi. Selanjutnya Beagle (1979) mengelompokkan objek matematika dalam 4 (empat) kategori yaitu fakta, operasi, konsep dan prinsip.

Fakta adalah suatu kesepakatan dalam matematika yang biasa disajikan dalam bentuk kata-kata (istilah) dan simbol. Sebagai contoh "$\in$" dalam penulisan $a \in G$, G suatu himpunan. Simbol ini berarti "anggota", sehingga $a \in$

G dibaca "a anggota himpunan G. Kesepakatan lain misalnya garis bilangan, di sebelah kiri dari angka 0 (nol) bernilai negatif dan di sebelah kanannya bernilai positif.

Skill dalam matematika lebih dikenal dengan operasi, yaitu hal-hal yang dinyatakan dengan aturan atau prosedur tertentu yang dikenal dengan algoritma. Skill dapat berupa suatu operasi yang mengaitkan objek-objek dalam matematika. Operasi dalam matematika menurut Beagle (1979; 7) adalah suatu fungsi yang mengaitkan objek matematika yang satu dengan lainnya. Sebagai contoh fungsi yang mengaitkan himpunan A dengan himpunan B sehingga menghasilkan suatu himpunan yang ditulis $A \cap B$ adalah "$\cap$" (dibaca irisan atau interseksi). Yang dimaksudkan di sini bukanlah tulisan atau lambang "$\cap$" itu, tetapi prosesnya. $A \cap B$ adalah suatu himpunan yang unsur-unsurnya merupakan unsur yang berada di A dan berada di B. Dalam hal ini "$\cap$" disebut operator. Selanjutnya operasi matematika menurut Soedjadi (1987; 12) adalah suatu aturan untuk mendapatkan elemen tunggal dari satu atau lebih elemen yang diketahui. Elemen tunggal yang diperoleh disebut hasil operasi dan elemen yang diketahui disebut elemen yang dioperasikan.

Konsep adalah sesuatu yang dibentuk oleh fakta atau konsep-konsep yang telah terbentuk sebelumnya. Contoh: Grup, Sub grup, Sub grup normal. Artinya konsep grup mendasari konsep sub grup dan sub grup normal. Dengan suatu konsep seseorang dapat meng-kelompokkan objek-objek menurut jenisnya. Hal ini sesuai dengan pendapat Gagne (dalam Bell, 1981; 108) yang mengatakan bahwa konsep dalam matematika merupakan suatu ide (pengertian) abstrak yang memungkinkan seseorang dapat mengklasifikasikan objek-objek atau kejadian-kejadian itu, dan menentukan apakah objek atau kejadian itu merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak itu.

Konsep dapat dipelajari melalui pengamatan langsung ataupun melalui definisi. Contoh jika diberikan himpunan matriks ordo 2 yang det. $\neq 0$ terhadap operasi perkalian matriks, dan himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan, maka mahasiswa dapat menunjukkan bahwa matriks terhadap operasi perkalian matriks tidak bersifat komutatif, dan himpunan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan bersifat komutatif. Dengan demikian untuk selanjutnya mahasiswa dapat mengklasifikasi definisi grup menjadi grup komutatif dan grup tak komutatif.

Objek matematika yang paling kompleks adalah prinsip matematika. Prinsip dalam matematika adalah sekumpulan konsep-konsep yang dikombinasikan dengan suatu relasi. Pendapat Gagne (dalam Bell, 1981; 109) tentang prinsip dalam matematika adalah rangkai-an konsep-konsep beserta hubungannya. Prinsip dalam matematika umumnya berbentuk pernyataan, teorema atau rumus-rumus. Contoh prinsip matematika dalam Struktur Aljabar antara lain "N sub grup normal G jika dan hanya jika $gNg^{-1} = N$, $\forall g \in G$. Untuk memahami prinsip ini mahasiswa dituntut untuk menguasai konsep tentang sub grup normal dan himpunan gNg^{-1}.

1.3 Latihan

1) Jelaskan pengertian matematika yang anda ketahui!
2) Apakah matematika sama dengan matematika sekolah? Jelaskan!
3) Sebutkan objek-objek matematika yang kamu ketahui!
4) Apakah matematika dapat disebut ilmu?
5) Berikan sebuah contoh fakta dalam matematika!
6) Berikan sebuah contoh konsep dalam matematika!
7) Berikan sebuah contoh operasi dalam matematika!
8) Berikan sebuah contoh prinsip dalam matematika!

BAB II

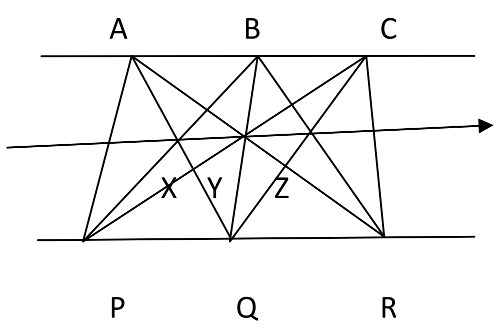
AKSIOMATIKA

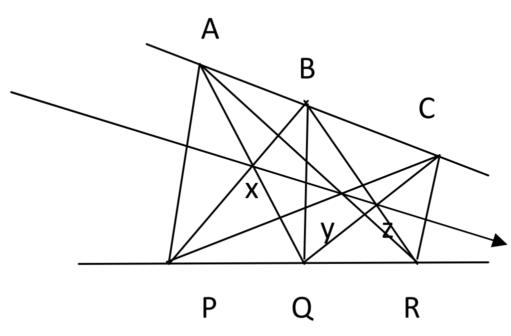
2.1 Deduktif-Aksiomatik.

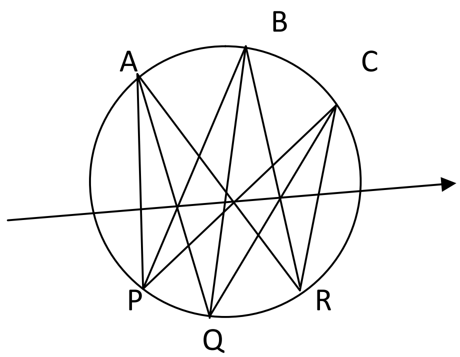
Matematika sebagai ilmu sifat-sifat atau prinsip-prinsipnya dibentuk atau ditemukan melalui pola pikir deduktif ataupun induktif. Dengan kata lain sifat-sifat atau prinsip-prinsip matematika ada yang ditemukan melalui pengalaman lapangan ada pula yang tanpa pengalaman lapangan ataupun malah intuitif (Soedjadi, 1994).

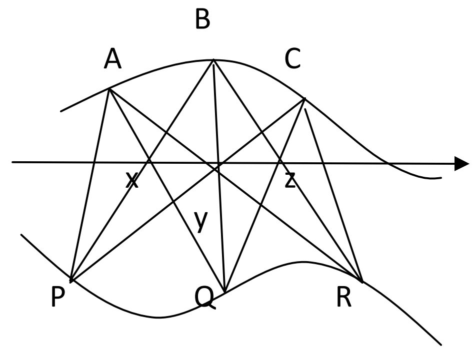
Namun setelah prinsip atau sifat tertentu berada dalam suatu sistem atau struktur, maka harus dapat dibuktikan secara deduktif. Dalam semua penalaran deduktif, kesimpulan yang ditarik merupakan akibat logik dari alasan-alasan yang bersifat umum menjadi bersifat khusus. Penerapan cara berpikir logik ini akan menghasilkan suatu teorema-teorema, yang selanjutnya dapat diterapkan dalam menyelesaikan masalah-masalah baik dalam matematika maupun diluar matematika.

Contoh (diambil dari Soedjadi)





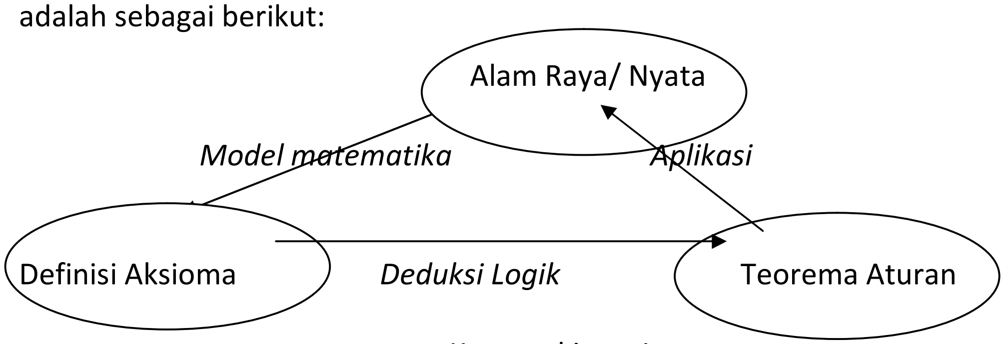




Mula-mula diamati dua buah garis sejajar g dan h, dan titik A, B, dan C pada garis g sedangkan titik P, Q, dan R pada garis h. kemudian masing-masing titik dihubungkan oleh garis lain. Ternyata tampak ada tiga titik potong garis-garis hubung itu terletak pada sebuah garis, yaitu x, y dan z. Bagaimana jika kedua garis g dan h tidak sejajar? Bagaimana jika garis g dan h tidak lurus? Bagaimana jika kedua garis itu merupakan bagian dari sebuah lingkaran? Ternyata selalu ditemukan titik X, Y, dan Z yang segaris.

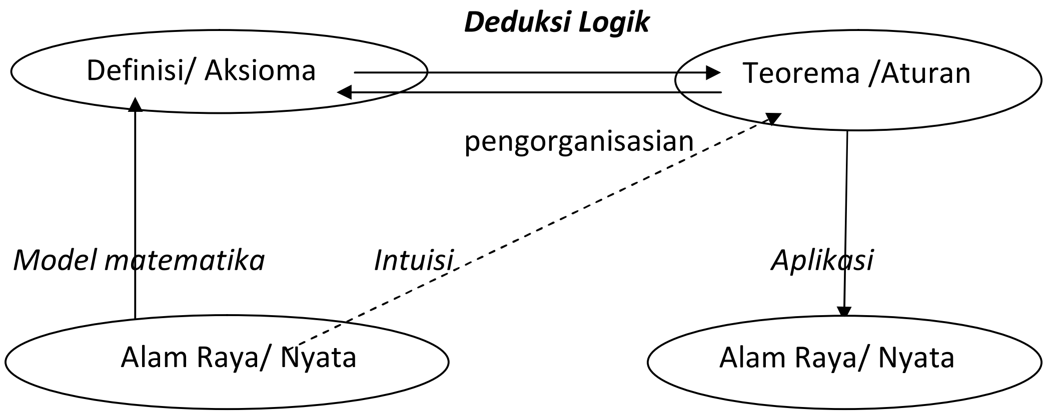
Selanjutnya temuan itu harus dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan kesepakatan-kesepakatan atau sifat-sifat yang sudah ada. Jadi pada akhirnya haruslah digunakan pola pikir deduktif.

Secara skematis kemungkinan temuan beberapa prinsip matematika adalah sebagai berikut:



Kemungkinan 1

Gambar 2.1.1: Kemungkinan temuan rumus



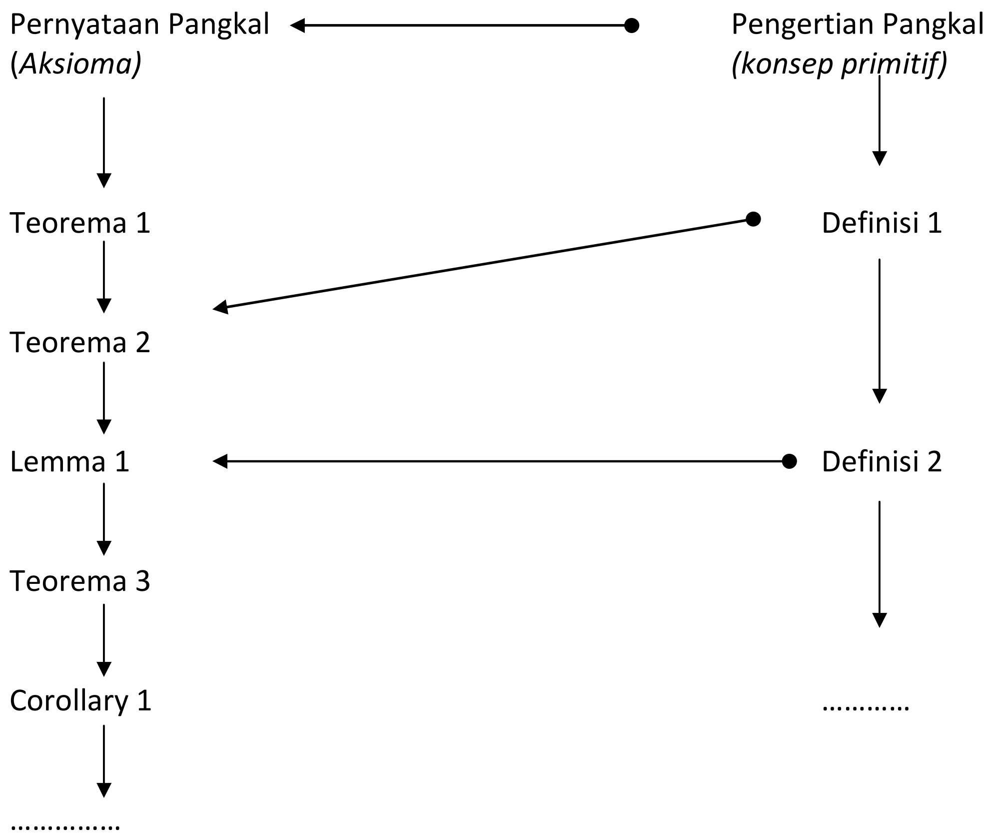
Kemungkinan 2

Gambar 2.1.2: Kemungkinan temuan rumus

Sedangkan bila ditinjau dari sistemnya sendiri matematika merupakan sistem aksiomatik. Karena itu metodenya aksiomatik, yaitu terdiri dari sekumpulan pernyataan dasar yang kosong dari arti. Karena itu kita tidak bisa mengatakan benar atau salahnya jika pernyataan itu masih kosong dari arti. Pernyataan-pernyataan dasar itu disebut aksioma. Aksioma-aksioma tersebut merupakan kesepa-katan belaka, yaitu menyatakan sifat-sifat dan relasi-relasi yang merupakan terminologi kosong dari arti yang kita sepakati berlaku.

Aksioma sebagai landasan matematika itu dapat diperoleh dari dunia nyata/alam sekitar sebagai sumber inspirasi, yang kemudian diabstraksikan dan digeneralisasikan dengan menggunakan simbul-simbul. Dengan menggunakan bahasa matematika yang penalaranya deduktif, diperoleh teorema yang kemudian dikembangkan menjadi teorema-teorema yang pada akhirnya dapat diaplikasikan ke ilmu-ilmu lain yang bermanfaat untuk kehidupan nyata.

Secara skematis struktur deduktif-aksiomatik dapat dilihat dalam diagram berikut:



Gambar 2.1.3: Struktur Deduktif Aksiomatik

2.2 Pengertian dan Pernyataan Pangkal

Bagaimana kita percaya dan menerima bahwa 4+7 = 11? Dan hampir tak ada protes atau sangkalan bagi kebenaran pernyataan tersebut. Karena hal ini telah “disepakati” bahwa yang dibicarakan adalah bilangan dengan basis sepuluh. Demikian juga lambang “4” telah disepakati sebagai bilangan empat. Pertanyaan yang muncul kemudian adalah “Kapan kesepakatan itu dimulai atau diadakan?”. Untuk pertanyaan ini mungkin kita harus memberikan hormat kepada guru-guru SD kita dahulu. Jika lingkup pembicaraan diubah menjadi basis delapan maka pernyataan tersebut sudah tidak benar lagi. Sehingga semesta pembicaraan memegang peranan penting dalam matematika.

Dalam setiap semesta pembicaraan ada pangkal-pangkal kesepakatan. Pangkal-pangkal kesepakatan itu dapat berupa “pernyataan” dapat juga berupa “pengertian atau unsur” tertentu. Suatu struktur matematika tertentu terdapat “pernyataan pangkal” atau biasa disebut “aksioma” dan “pengertian pangkal” atau biasa disebut “unsur primitif atau undefined term”. Aksioma diperlukan untuk menghindarkan berputar-putar dalam pembuktian atau “circulus in probando”, sedangkan unsur primitif dalam struktur matematika untuk menghindarkan berputar-putar dalam pendefinisian atau “circulus in definiendo”. Hal ini sekaligus menunjukkan bahwa kebenaran suatu pernyataan dalam matematika sangat tergantung pada kebenaran pernyataan-pernyataan atau unsur-unsur terdahulu yang telah diterima sebagai benar disepakati. Jelas bahwa dalam matematika dianut kebenaran koherensi dan kebenaran konsistensi. Hal ini oleh Soedjadi sering disebut aspek yang bersifat “transferabel”.

Contoh yang mudah diingat dan dipahami adalah dari geometri Euclides. Misalnya : (1) titik, garis, dan bidang dipandang sebagai unsur primitif; (2) melalui dua titik dapat dibuat tepat satu garis lurus, sebagai salah satu aksioma.

Dari unsur-unsur primitif dan aksioma tertentu dapat diturunkan suatu pernyataan tertentu yang sering disebut “teorema”. Demikian juga dapat dibuat definisi tentang suatu konsep lain.

2.3 Sistem Aksioma

Suatu struktur matematika biasanya didahului dengan beberapa unsur primitif dan beberapa pernyataan pangkal atau aksioma. Beberapa aksioma tersebut sering juga disebut sistem aksioma. Agar suatu kumpulan aksioma dapat merupakan sebuah sistem diperlukan syarat-syarat penting, diantaranya adalah:

1. konsisten (taat asas)
2. independen (bebas)
3. komplit atau lengkap
4. ekonomis.

Dari keempat syarat tersebut yang terpenting adalah tiga syarat pertama, sebab syarat keempat merupakan akibat langsung dari syarat kedua.

Suatu sistem aksioma dikatan konsisten bila pernyataan-pernyataan dalam kumpulan aksioma-aksioma itu tidak kontradiktif. Non-kontradiksi itu bukan hanya dalam makna pernyataannya tetapi juga dalam istilah serta simbol yang digunakan.

Suatu sistem aksioma dikatakan independen jika masing-masing pernyataan dari kumpulan aksioma itu tidak saling tergantung. Dengan kata lain pernyataan yang satu tidak dapat diturunkan dari pernyataan yang lain.

Suatu sistem aksioma dikatakan lengkap jika setiap pernyataan yang diturunkan dari aksioma tersebut dapat dibuktikan kebenaran atau kesalahannya.

Suatu sistem aksioma dikatakan ekonomis jika simbol-simbol atau istilah-istilah yang digunakan tidak berlebihan *(tidak redundan),* selain itu tidak diperbolehkan adanya pernyataan yang memiliki makna sama (ekuivalen) dengan pernyataan lain.

Contoh 2.3.1 : S suatu himpunan

Aks-1. ($\forall$ a $\in$ S). a ☺ a

Aks-2. ($\forall$ a, b $\in$ S). a ☺ b dan b ☺ a $\Rightarrow$ a ☺ b

Aks-3. ($\forall$ a, b, c $\in$ S). a ☺ b dan b ☺ c $\Rightarrow$ a ☺ c

(a) apakah aks-1, aks-2, dan aks-3 konsisten?

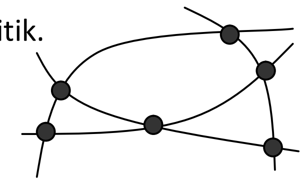
(b) apakah aks-1, aks-2, dan aks-3 independent (bebas)?

(c) apakah aks-1, aks-2, dan aks-3 lengkap (komplit)?

(d) apakah aks-1, aks-2, dan aks-3 ekonomis?

(e) Berikan sebuah contoh teorema yang dapat diturunkan dari sistem aksioma di atas!

Contoh 2.3.2 : S adalah himpunan titik. Garis merupakan subset S. Titik dan garis merupakan unsur yang tak didefinisikan. Dalam S disusun kumpulan aksioma sebagai berikut:



Aks-1. Sepasang garis selalu ada pada tepat satu titik.

Aks-2. Setiap titik ada pada tepat dua garis.

Aks-3. Banyaknya garis ada empat.

Beberapa teorema yang dapat diturunkan.

Teo-1. Terdapat tepat enam titik dalam S.

Teo-2. Terdapat tepat tiga titik pada setiap garis.

2.4 Klasifikasi Aksioma.

Dalam mengklasifikasikan sistem aksioma berikut dimaksudkan untuk mempermudah dalam mempelajari. Terdapat dua klasifikasi dalam tulisan ini, yaitu (1) aksioma "self evident truth" dan "non-self evident truth" (2) aksioma "material", "formal" dan "diformalkan".

2.4.1 Aksioma self evident truth.

Suatu aksioma dikatakan self evident truth jika dalam pernyataanya sudah langsung tergambar kebenaranya. Aksioma dari geometri Euclides "melalui dua titik berlainan dapat dibuat tepat satu garis lurus", aksioma nampak langsung dapat ditangkap kebenaran-nya di kepala kita.

2.4.2 Aksioma non-self evident truth.

Suatu aksioma dikatakan non-self evident truth jika kita tidak dapat langsung menangkap kebenaran dari aksioma tersebut. Hal ini dikarenakan aksioma tersebut hanya mengaitkan beberapa fakta atau konsep dengan relasi tertentu, sehingga kebenaran dari aksioma tersebut cenderung hanya kesepakatan belaka. Contoh sistem aksioma dalam klasifikasi ini adalah sistem aksioma grup, topologi, ruang metrik, poset dan sebagainya. Justru karena pengangkatan aksioma seperti ini yang memberikan kemungkinan lebih besar dalam perkembangan matematika.

2.4.3 Aksioma material

Suatu aksioma dikatakan material jika unsur-unsur serta relasi yang terdapat dalam aksioma tersebut masih dikaitkan langsung dengan realitas atau dikaitkan dengan materi tertentu atau dianggap ada yang sudah diketahui. Contoh Aksioma Grup pada bilangan real. R himpunan bilangan real, dengan operasi penjumlahan merupakan grup.

2.4.4 Aksioma formal

Suatu aksioma dikatakan formal jika unsur-unsurnya dikosongkan dari arti, namun masih dimungkinkan adanya unsur atau relasi yang dinyatakan dengan bahasa biasa, antara lain terlihat dengan masih bermaknanya kata “atau” dan “dan” dalam logika. Contoh <G, +> merupakan grup jika dan hanya jika memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers. Jika G dikosongkan dari arti, maksudnya G tidak harus bilangan. Sedangkan operasi “+” pada G masih diartikan sebagai operasi penjumlahan biasa.

2.4.5 Aksioma yang diformalkan.

Suatu aksioma dikatakan diformalkan jika semua unsur termasuk tanda logika dikosongkan dari makna, sedemikian hingga semua unsur diperlakukan sebagai simbol belaka. Contoh <G, ☞> merupakan grup jika dan hanya jika memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers. Jika G dikosongkan dari arti, maksudnya G tidak harus bilangan. Begitu juga operasi “☞” pada G dianggap sebagai simbol belaka.

2.5 Konsep Bukan Pangkal

Di bagian depan telah dikemukakan adanya pengertian atau unsur primitif. Secara kurang tepat sering dikatakan “konsep yang tak didefinisikan”.

Di dalam struktur matematika terdapat konsep-konsep yang didefinisikan berdasarkan konsep-konsep terdahulu. Konsep semacam ini sering disebut konsep bukan pangkal. Selain itu konsep dalam tulisan ini diartikan sebagai ”ide abstrak yang dapat digunakan untuk mengklasifikasikan atau menggolongkan”. Dan suatu konsep dapat dibentuk melalui suatu abstraksi. Misalkan dalam kehidupan sehari-hari kita dapat mengatakan bahwa sepeda, sepeda motor, mobil, kereta api, becak adalah kendaraan. Tetapi pohon, batu, gunung, almari bukan kendaraan. Jelas bahwa kendaraan adalah suatu konsep. Konsep kendaraan ini diperoleh dari suatu abstraksi dengan memandang beberapa sifat tertentu dari kendaraan dan menggugurkan sifat-sifat yang tidak diperlukan.

2.5.1 Konsep dan pembentukannya.

Dalam matematika dikenal beberapa konsep, diantaranya “segitiga”, “fungsi”, “bilangan”, “ruang topologi”, “jarak” dan masih banyak lagi. Jika dikatakan “fungsi” maka ide itu dapat digunakan untuk mengadakan pengelompokan atau pengklasifikasian, sedemikian hingga suatu pemasangan atau relasi dapat dimasukkan fungsi atau bukan. Demikian pula konsep-konsep yang lain. Sehingga timbul pertanyaan bagaimana pembentukan suatu konsep itu? Ternyata pembentukan suatu konsep dapat melalui: (1) abstraksi, (2) idealisasi, (3) abstraksi dan idealisasi dan (4) penambahan syarat pada konsep terdahulu.

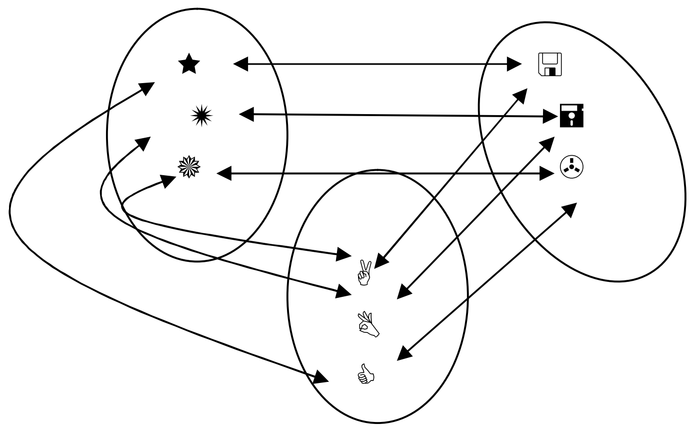
2.5.1.1 Abstraksi

Suatu abstraksi terjadi jika kita memandang beberapa obyek kemudian kita “gugurkan” sifat-sifat atau ciri-ciri dari obyek itu yang dianggap tidak penting, atau tidak diperlukan dan akhirnya hanya diperhatikan atau diambil sifat penting yang dimiliki bersama.

Dengan menggugurkan sifat-sifat hakiki yang dimiliki masing-masing himpunan dan urutan yang mungkin dari masing-masing anggota, akan diperoleh satu sifat berserikat yang dimiliki oleh ketiga himpunan tersebut yaitu "tiga".

Oleh karena itu dikatakan bahwa konsep bilangan diperoleh dengan melakukan dua kali abstraksi.

Contoh : Dari tiga buah himpunan berikut:



2.5.1.2 Idealisasi

Idealisasi terjadi bila kita berhadapan dengan obyek tertentu yang tidak sempurna, misalnya tidak lurus benar, tidak rata benar, tidak mulus benar, kemudian kita menganggapnya sempurna.

Contoh: Tepi meja sebenarnya tidak lurus benar, tetapi dalam menyelesaikan soal tentang tepi meja itu kita menganggapnya lurus benar. Permukaan meja tidak rata benar, tetapi dalam menyelesaikan soal tentang meja itu dianggap rata benar. Sebenarnya bangun-bangun geometri hanya ada dipikiran bukan suatu benda konkrit.

2.5.1.3 Idealisasi dan abstraksi.

Pembentukan konsep juga bisa terjadi dengan abstraksi dan idealisasi sekaligus.

Contoh: Kalau diberikan beberapa buah benda berbentuk kubus, ada yang terbuat dari kawat, kayu, ataupun karton. Kemudian dibuat gambar kubus yang mewakili benda-benda itu. Dalam hal ini tidak dihiraukan lagi apakah benda itu terbuat dari kayu, kawat, ataupun karton. Sehingga kita telah menggugurkan sifat benda itu, dengan kata lain telah terjadi suatu abstraksi. Begitu juga kita menganggap bahwa kawat tersebut lurus benar, karton tersebut rata benar, kayu tersebut rata benar. Sehingga kita telah melakukan idealisasi.

2.5.1.4 Penambahan pada konsep terdahulu.

Suatu konsep juga dapat dibentuk dengan menambahkan satu atau lebih sifat pada konsep pangkal. Perhatikan konsep tentang fungsi " fungsi adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan pertama dengan tepat satu kepada himpunan kedua". Dalam hal ini fungsi dapat dibentuk dari konsep "relasi" dengan menambahkan sifat bahwa "setiap anggota himpunan pertama dengan tepat satu kepada himpunan kedua".

2.5.2 Definisi atau Batasan

Definisi adalah ungkapan yang membatasi suatu konsep. "trapesium" adalah suatu konsep. Sedangkan definisi trapesium adalah "trapesium adalah segi empat yang terjadi jika sebuah segitiga dipotong oleh garis yang sejajar salah satu sisinya". Ungkapan tersebut membatasi konsep trapesium. Ungkapan tersebut belum memiliki nilai kebenaran, tetapi setelah ditetapkan pada suatu struktur tertentu maka ungkapan tersebut memiliki nilai kebenaran "benar". Terdapat beberapa klasifikasi dari definisi yaitu, (a) klasifikasi menurut jenisnya, (b) klasifikasi menurut unsur-unsurnya.

2.5.3 Klasifikasi definisi menurut jenisnya.

1) Definisi analitik

Suatu definisi dikatakan analitik jika definisi tersebut menyebutkan genus proksimum dan deferensia spesifika.

Genus proksimum dimaksudkan sebagi keluarga terdekat, sedangkan deferensia spesifika dimaksudkan sebagai pembeda khusus.

Contoh:

(a) fungsi injektif (satu-satu) adalah fungsi yang setiap daerah hasilnya memiliki prapeta tepat satu.

(b) Fungsi injektif adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan pertama dengan tepat satu kehimpunan kedua dan anggota himpunan kedua yang memiliki pasangan, pasangannya tepat satu pada himpunan pertama.

Jelas bahwa contoh (a) menunjukkan genus proksimum yaitu “fungsi”, sedangkan (b) tidak menyebutkan genus proksimum. Sehingga definisi (a) lebih ekonomis dari pada definisi (b).

2) Definisi genetik

Suatu definisi dikatakan genetik jika definisi tersebut menunjukkan atau mengungkapkan cara terjadinya atau membentuknya konsep yang didefinisikan.

Contoh :

Jaring-jaring limas adalah bangun yang terjadi jika sisi-sisi limas direbahkan dengan poros rusuk alasnya hingga sampai pada bidang pemuat alasnya.

Trapesium adalah segi empat yang terjadi jika sebuah segitiga dipotong oleh garis yang sejajar salah satu sisinya.

3) Definisi dengan rumus.

Suatu definisi selain diungkapkan dalam bentuk kalimat biasa juga dapat diungkapkan dengan kalimat matematika. Sehingga definisi juga dapat dinyatakan dengan rumus.

Contoh :

Dalam ilmu bilangan sering dijumpai : $a - b = a + (-b)$

Dalam analisis fungsi didefinisikan sebagai,

$$f = \{(a,b) \mid (a,b) \text{ dan } (a,b') \in f \text{ maka } b=b'\}$$

Dalam kombinatorik: $n!=n(n-1)!$, dengan $1! = 1$ dan $0! = 1$.

2.5.4 Klasifikasi menurut unsur-unsurnya.

Unsur-unsur yang membentuk definisi adalah latar belakang, genus, istilah yang didefinisikan, dan atribut.

Contoh :

a. Segitiga samasisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama.
b. Suatu segitiga adalah samasisi jika dan hanya jika ketiga sisinya sama.

Dari definisi di atas jelas bahwa:

Latar belakangnya adalah “bangun datar”.

Genusnya adalah “segitiga”.

Istilah yang didefinisikan adalah “segitiga sama sisi”.

Atributnya adalah “ketiga sisinya sama”

Dari dua definisi di atas definisi (b) menggunakan kata “jika dan hanya jika”, terlihat bahwa definisi ini lebih mudah dalam menentukan unsur-unsurnya. Dalam hal ini terasa dalam menentukan atribut dari definisi tersebut.

Perhatikan definisi dari barisan: “Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari bilangan asli N dengan range bilangan real. Jika kita gunakan kata “jika dan hanya jika” definisi tersebut menjadi “ Suatu fungsi disebut barisan bilangan real jika dan hanya jika domainya bilangan asli N dan rangenya bilangan real”. Dari definisi kedua jelas terlihat dengan mudah, latar belakangnya “bilangan real”; genusnya “fungsi”; istilah yang didefinisikan “barisan bilangan real”; sedangkan atributnya adalah “domainya bilangan asli N dan rangenya bilangan real”. Coba cari unsur-unsur dari definisi berikut: “Suatu fungsi dikatakan kontinu pada A jika fungsi tersebut kontinu pada setiap titik di A“.

2.5.5 Intensi dan ekstensi suatu definisi.

Perhatikan empat definisi berikut:

a. Segitiga sama sisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama.
b. Segitiga sama sisi adalah segitiga yang ketiga sudutnya sama.
c. Segitiga sama sudut adalah segitiga yang ketiga sudutnya sama.
d. Segitiga sama sudut adalah segitiga yang ketiga sisinya sama.

Definisi (a) dan (b) mendefinisikan hal yang sama yaitu segitiga sama sisi. Tetapi atributnya berbeda, yang (a) menekankan kepada “sisi” sedangkan yang (b) menekankan pada “sudut”. Dalam hal ini dikatakan bahwa definisi (a) dan (b) memiliki intensi yang berbeda. Demikian juga definisi (c) dan (d) mendefinisikan hal yang sama yaitu, segitiga sama sudut. Sekarang coba pikirkan! Bagaimana himpunan bangun yang didefinisikan oleh keempatnya? Apakah bangun tersebut sama ataukah berbeda? Adakah segitiga yang sama sisi yang bukan segitiga sama sudut? Adakah segitiga yang sama sudut yang bukan segitiga sama sisi? Jelas tidak terlalu sulit untuk menjawabnya, karena bangun yang didefinisikan oleh keempat definisi tersebut sama. Dalam hal ini dikatakan bahwa keempat definisi tersebut memiliki ekstensi yang sama. Dua definisi atau lebih yang memiliki ekstensi sama disebut ekuivalen. Coba pikirkan tentang intensi dan ekstensi dari dua definisi berikut. “Bidang empat adalah suatu limas yang memiliki tepat empat buah sisi” dan “Limas segitiga adalah limas yang alasnya merupakan segitiga”. Adakah bidang empat yang bukan limas segitiga? Adakah limas segitiga yang bukan bidang empat? Jelas bahwa kedua definisi tersebut memiliki ekstensi yang sama, tetapi intensinya berbeda.

2.6 Pernyataan Bukan Pangkal

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa aksioma merupakan pernyataan pangkal. Sekarang kita diskusikan suatu pernyataan lain yang dapat diturunkan dari aksioma, yang sering disebut teorema. Jika aksioma kebenaranya disepakati atau tidak perlu bukti. Tetapi teorema merupakan pernyataan yang harus dapat dibuktikan kebenaranya. Selain teorema sering juga ditemui lemma, corrolary. Lemma ini juga merupakan pernyataan bukan pangkal hanya fungsinya lebih kecil dari teorema. Corollary merupakan pernyataan akibat dari suatu teorema, atau sering disebut teorema akibat.

2.6.1 Teorema dan menemukannya.

Teorema adalah salah satu perwujudan dari obyek matematika yang disebut “prinsip”. Dalam suatu teorema ataupun sifat mungkin terdapat fakta konsep maupun operasi yang terkait. Dalam teorema terdapat hubungan “jika ….maka….”, baik dalam bentuk sederhana maupun dalam bentuk kompleks. Suatu teorema dapat dalam bentuk kalimat yang panjang, dapat juga dalam bentuk pendek atau rumus. Suatu teorema ditemukan tidak hanya melalui pemikiran deduktif, tetapi dapat juga ditemukan melalui pemikiran induktif atau pengalaman lapangan dan data empirik. Namun demikian setelah ditemukan harus dapat dibuktikan kebenaranya dengan pola pikir deduktif dalam strukturnya. Dapat juga teorema ditemukan melalui pola, coba-coba ataupun konjengtur, namun setelah ditemukan harus dapat dibuktikan dalam strukturnya (lihat Widodo : 1999a). Hal demikian sering terjadi dalam teorema-teorema jaringan atau teori graph. Misalkan teorema "empat warna" telah lama ditemukan dan hanya merupakan konjengtur, yang baru dapat dibuktikan setelah ditemukannya komputer generasi baru.

2.6.2 Unsur-unsur teorema

Suatu teorema biasanya dapat dinyatakan dalam bentuk implikasi, walaupun tidak jarang yang dalam bentuk biimplikasi. Jika suatu pernyataan dalam bentuk implikasi "Jika ……….. maka ………" Dapat ditinjau unsur-unsurnya. Unsur-unsur teorema tersebut adalah (a) latar belakang; (b) hipotesis dan (c) konsekuen.

Contoh : Sudut-sudut segitiga samakaki adalah sama besar. Pernyataan tersebut dapat diubah menjadi implikasi "Jika sebuah segitiga sama kaki maka sudut-sudut alasnya sama". Dari pernyataan terakhir dapat ditemukan dengan mudah latar belakangnya "segitiga", hipotesisnya "segitiga samakaki" dan konsekuennya "sudut-sudut alasnya sama".

Hipotesis dari teorema merupakan bagian yang diketahui, sedangkan konsekuen suatu teorema merupakan bagian yang akan dibuktikan kebenarannya.

Perhatikan teorema berikut :

Jika $S \subset R$ dan $S \neq \varnothing$, w batas bawah dari S, maka w=inf S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $s_\varepsilon < w + \varepsilon$.

Teorema ini jika ditulis dalam bentuk simbolik "$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$". Untuk melihat hipotesis dari teorema ini agak sulit, sehingga diperlukan beberapa langkah untuk mengubah dalam bentuk implikasi. Bentuk "$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$" senilai dengan $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ dan $p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$, bentuk terakhir ini senilai dengan $(p \wedge q \Rightarrow r)$ dan $(p \wedge r \Rightarrow q)$. Bentuk terakhir jelas terlihat hipotesis dan konsekuenya. Dengan demikian suatu teorema yang kompleks dapat dilihat hipotesis dan konsekuennya dengan memandang suatu teorema secara bagian demi bagian.

2.7 Latihan

Perhatikan definisi berikut:

1. A function is a correspondence two non empty set that assigns to every element in the first set (the domain) exactly one element in the second set (the codomain) (Journal for Reaserch in Mathematics Education, 1989)
2. A function is defined by two sets, the domain and the range, and by rule of correspondence that assigns to every element of the domain exactly one element of the range (NCTM, Year Book, 1988)
3. A function is a correspondence between two set A and B in which each element of A correspond to exactly one element of B (Function, Statistic and Trigonometry, 1992, Rheta, UCSMP).
4. A function is a rule that assign to each members of a set D, the domain, a unique member of set R, the range. (Introuductory Analysis, 1988, Dolciani)
5. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang khusus, yaitu relasi dimana setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B. (Matematika SMP Jilid 3, 1976, PT Intermasa)
6. (a) A relation is a set of ordered pairs.
   (b) A function is a relation for which is exactly one value of the dependent variable for each value of independent variable. (Algebra and Trigonometry, 1990, Paul Foerster)

7. A function of f is a relation with the following property, if both (x,y_1) and (x,y_2) belong to relation, then $y_1 = y_2$. (Precalculus, 1992, Demana)
8. (a) Any set of ordered pairs is a relation.

   (b) A function is a set of ordered pairs in which different pairs have different first members. (Introuductory Analysis, 1988, Dolciani).
9. A function is a set of ordered pairs (x,y) for which there is never more than one value of y for any one given value of x. (Algebra, 1990, Paul Foerster)
10. A function is a set of ordered pairs in which each firs coordinate apears with exactly one second coordinate. (Algebra, 1991, UCSMP)
    a. Klasifikasikan definisi 1 sampai dengan 10 di atas termasuk definisi genetik, analitik, atau rumus.
    b. Klasifikasikan definisi 1 sampai dengan 10 di atas menurut unsur-unsurnya!
    c. Apakah definisi 1 sampai dengan 10 di atas memiliki intensi yang sama?
    d. Apakah definisi 1 sampai dengan 10 di atas memiliki ekstensi yang sama?
    e. Berikan salah satu contoh fungsi yang memenuhi definisi 9 tetapi tidak memenuhi definisi 5.
11. Tentukan unsur-unsur yang membentuk teorema berikut:
    a. Jika a dan b elemen di R dan $a \neq 0$ sedemikian hingga $a . b = 1$ maka $b = \frac{1}{a}$.
    b. Misalkan $a, b \in R$ maka persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = (-a) + b$
    c. Misalkan $a, b \in R$, $a \neq 0$, maka persamaan $a . x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = (\frac{1}{a}) . b$
    d. Jika a sebarang elemen R, maka :
       1) $a . 0 = 0$
       2) $(-1) . a = -a$

3) -(-a) = a

4) (-1)(-1) = 1

e. Tidak ada bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$.

f. (lemma Jabat Tangan) Untuk setiap graph G berlaku $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\,|E(G)|$.

<sengaja dikosongkan>

Bab III

LOGIKA ELEMENTER

3.1 Pengertian Logika

Segala tingkah laku manusia sehari-hari, selalu dilandasi oleh akal budi dan pikiranya. Sehingga manusia dijuluki sebagai animal rasionalis, yaitu makhluk hidup yang mampu mengadakan pertimbangan. Sedangkan akal budi atau pikiran manusia, mengendalikan segala gerak hidup, dengan jasmani sebagai kendaraannya. Oleh karena itu pandai berpikir perlu bagi manusia.

Logika berasal dari kata benda logos yang berarti pikiran atau akal budi, dan ratio berarti pertimbangan. Sehingga logika dapat diartikan sebagai ilmu tentang bagaimana seharusnya kita berpikir untuk menghasilkan pertimbangan yang masuk akal (valid). Berpikir adalah suatu kegiatan jiwa untuk mencapai suatu pengetahuan. Pengetahuan adalah hal yang kita ketahui. Mengetahui adalah suatu keyakinan tentang adanya persesuaian antara gagasan dan kenyataan atau realita. Gagasan adalah hasil dari olah pikir dan kenyataan adalah hasil dari tanggapan, baik tanggapan lewat panca indra (kenyataan indrawi yang bersifat konkrit) maupun tanggapan lewat renungan (kenyataan ideal yang bersifat abstrak).

Jelaslah bahwa gagasan merupakan sumber pengetahuan, pengetahuan yang dicapai lewat persesuaian antara gagasan dan pengamatan atau persepsi, baik persepsi ekstern maupun persepsi intern (instrospeksi) dinamakan pengetahuan langsung. Sedangkan pengetahuan yang dicapai lewat kesimpulan, atau konklusi, lewat kesaksian atau lewat otoritas dinamakan pengetahuan tidak langsung.

Himpunan pengetahuan yang tersusun secara sitematik disebut ilmu atau sain. Karena logika tidak menggambarkan bagaimana proses berpikir, tetapi bagaimana seharusnya cara berpikir, maka logika termasuk ilmu normatif.

Disamping logika itu suatu ilmu sebenarnya logika juga sesuatu seni atau art. Dalam hal ini yang dimaksud seni adalah cara kerja menggunakan pengetahuan.

Jadi logika itu adalah suatu ilmu dan sekaligus suatu seni, bahkan ada yang menyebutnya logika itu sebagai ilmunya ilmu (scientia scientarium) seninya seni (art artium). Secara umum logika adalah ilmu tentang bagaimana seharusnya kita berpikir untuk menghasilkan pertimbangan yang masuk akal (valid).

Sekarang akan kita tinjau kaitan antara logika dengan matematika. Matematika sebagai ilmu tentang cara mempelajari pengetahuan. Sebelum melihat kaitan antara logika dan matematika lebih jauh, kita perhatikan petikan yang dikatakan oleh Bertrand Russell "Sekarang nampak bahwa matematika bersifat semakin logik dan logika semakin matematik. Dalam alam modern ini pengembangannya semakin membulat hingga sukar untuk dipisahkan atau dibedakan. Perbedannya seperti antara pemuda dan jantan. Logika merupakan kepemudaan dari matematika dan matematika merupakan kejantanan dari logika. Semua konsep matematika dirumuskan atas dasar konsep logika, semua perumusan matematika dikembangkan sebagai rumusan logika".

Teori matematika dihasilkan dari kerjasama antara himpunan aksioma, dan logika. Himpunan aksioma merupakan basis yang mengawali teori, sedangkan logika menyusun, menurunkan dan mengembangkan susunan teori keseluruhan. Dalam kedudukannya sebagai cara berpikir dan belajar, matematika dan logika diperlukan bagi berbagai ilmu pengetahuan. Hampir semua ilmu pengetahuan telah mengambil manfaatnya sebagai alat terutama ilmu pengetahuan alam dan teknologi. Terapan secara khusus pada ilmu-ilmu lain mengahasilkan pendekatan secara khusus. Pendekatan matematika diantaranya ekonometrika, biometrika, psikometrika, jurimetrika. Perlu disadari bahwa kehidupan semakin kompleks, sebagai akibat komunikasi antar bangsa semakin akrab, kemajuan dalam segala bidang ilmu pengetahuan dan teknologi serta akibat yang ditimbulkan semakin mencekam kehidupan.

Segala macam sistem kehidupan serta komponen-komponennya saling berkaitan dan bergantungan sehingga diperlukan alat pemecahan yang semakin universal. Komputerisasi merupakan salah satu jawaban untuk memecahkan persoalan yang timbul pada awal abad ini. Hal ini juga merupakan salah satu ide matematika dalam menyelesaikan masalah yang sedemikian kompleks dan cepat berubah.

Istilah logika yang digunakan dalam buku ini adalah logika matematika. Penggunaan logika matematika ini atas dasar suatu pendekatan mempermasalahkan logika secara matematika. Beberapa penulis mengunakan istilah logika simbolik, karena penyajiannya menggunakan simbol-simbol. Pada akhir-akhir ini banyak penelitian mengenai “*Fuzzy Logic*” atau logika kabur.

Orang yang mula-mula mengembangkan logika adalah filosof Aristoteles (400 SM). Selanjutnya logika simbolik dikembangkan oleh Leibniz (1646 – 1716), sehingga logika makin banyak dipelajari oleh matematikawan daripada filosof. Pada abad XIX George Boole (1815 – 1864) menerbitkan buku “Laws of Thought” yang memuat logika sebagi sistem matematika yang abstrak. Disamping itu masih banyak lagi tokoh-tokoh pendukung perkembangan logika matematika diantaranya, Leonard Euler (1707 – 1783), John Venn (1834 – 1923), dan Bertrand Russel (1872 – 1970).

3.2 Pernyataan

Definisi 3.1: Pernyataan adalah kalimat deklaratif yang hanya bernilai benar saja, atau salah saja tetapi tidak sekaligus benar dan salah.

Pernyataan akan dinyatakan oleh huruf-huruf p, q, r (dengan atau tanpa indeks bawah). Sifat fundamental sebuah pernyataan adalah bahwa pernyataan itu benar atau salah, tetapi tidak mungkin memiliki sekaligus kedua sifat tersebut. Kebenaran atau kesalahan sebuah pernyataan dinamakan nilai kebenarannya. Beberapa pernyataan adalah pernyataan gabungan (composite), yakni, terdiri dari subpernyataan dan berbagai kata hubung yang akan dibicarakan secara berturutan.

Contoh 1: "Tono memakai baju koko dan Tono memakai songkok", adalah sebuah pernyataan gabungan dengan subpernyataan "Tono memakai baju koko" dan "Tono memakai songkok".

Contoh 2: "Kemana anda pergi?" bukanlah sebuah pernyataan karena kalimat tersebut tidak benar dan tidak salah.

Contoh 3: "John sakit atau tua" adalah secara implisit, sebuah pernyataan komposit dengan subpernyataan "John sakit" dan "John tua".

Sebuah sifat fundamental pernyataan komposit adalah bahwa nilai kebenaran pernyataan tersebut seluruhnya ditentukan oleh nilai kebenaran setiap subpernyataannya dan cara subpernyataan-subpernyataan tersebut dihubungkan untuk membentuk pernyataan komposit.

3.3 Negasi

Dari sebarang pernyataan p, dapat dibuat pernyataan lain yang dinamakan negasi p, dan dilambangkan dengan ~p. ~ p dapat diartikan sebagai tidaklah benar p atau menyisipkan kata tidak dalam p.

Contoh 4: Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut:

(1) Jakarta ada di Indonesia

(2) Tidaklah benar bahwa Jakarta ada di Indonesia

(3) Jakarta tidak ada di Indonesia

(4) 8+6 = 10

(5) Tidaklah benar bahwa 8+6 = 10

(6) 8+6 $\neq$ 10

Pernyataan (2) dan (3) merupakan negasi dari pernyataan (1), sedangkan pernyataan (5) dan (6) merupakan negasi dari pernyataan (4).

Definisi 3.2: Jika p pernyataan yang bernilai benar maka negasi p pernyataan yang bernilai salah dan sebaliknya, jika p pernyataan yang bernilai salah maka negasi p pernyataan yang bernilai benar.

Dari definisi 2 ini dapat dibuat tabel kebenaran sebagai berikut:

p	~ p
B	S
S	B

B = Benar; S = salah

Jelas bahwa pernyataan (1) bernilai benar dan pernyataan (2) dan (3) masing-masing bernilai salah. Sedangkan pernyataan (4) bernilai salah dan pernyataan (5) dan (6) masing-masing bernilai benar.

3.4 Konjungsi

Sebarang dua pernyataan dapat digabungkan oleh kata "dan" untuk membentuk sebuah pernyataan komposit yang dinamakan *konjungsi* (konjunction) dari pernyataan semula. Secara simbolik, maka konjungsi dua pernyataan p dan q dinyatakan oleh $p \wedge q$.

Contoh 5: Misalkan p adalah "hujan sedang turun", dan q adalah "matahari sedang bersinar". Maka $p \wedge q$ menyatakan pernyataan "Hujan sedang turun dan matahari sedang bersinar".

Contoh 6: Simbol $\wedge$ dapat digunakan untuk mendefinisikan irisan dua himpunan, yaitu $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

Nilai kebenaran pernyataan komposit $p \wedge q$ didefinisikan sebagai berikut :

> **Definisi 3.3:** Jika *p* benar dan *q* benar, maka $p \wedge q$ benar, jika tidak maka $p \wedge q$ salah.

Dengan kata lain, konjungsi dua pernyataan hanya benar jika setiap komponen benar.

Contoh 7: Tinjaulah keempat pernyataan berikut :

(1) Jakarta ada di Indonesia dan 2+2=5
(2) Jakarta ada di Inggris dan 2+2=4
(3) Jakarta ada di Inggris dan 2+2=5
(4) Jakarta ada di Indonesia dan 2+2=4

Menurut definisi 3, hanya (4) yang benar. Setiap pernyataan lainnya salah karena setidak-tidaknya satu dari subpernyataannya salah. Sebuah cara yang memudahkan untuk menyatakan definisi 3, adalah dengan menggunakan sebuah tabel sebagai berikut:

p	Q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

3.5 Disjungsi

Sebarang dua pernyataan dapat digabungkan oleh kata "atau" untuk membentuk sebuah pernyataan komposit yang dinamakan *disjungsi* (disjunction) dari pernyataan semula. Secara simbolik, maka disjungsi dua pernyataan *p* dan *q* dinyatakan oleh $p \vee q$.

Contoh 8: Misalkan p adalah ”hujan sedang turun”, dan q adalah “matahari sedang bersinar. Maka $p \vee q$ menyatakan pernyataan “Hujan sedang turun atau matahari sedang bersinar”.

Contoh 9: Simbol $\vee$ dapat digunakan untuk mendefinisikan gabung-an dua himpunan, yaitu $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Nilai kebenaran pernyataan komposit $p \vee q$ didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3.4: Jika p benar atau q benar atau p dan q keduanya benar, maka $p \vee q$ benar, jika tidak maka $p \vee q$ salah.

Dengan kata lain, maka disjungsi dua pernyataan hanya benar jika paling sedikit satu komponen benar.

Contoh 10: Tinjaulah keempat pernyataan berikut :

(1) Paris ada di Perancis atau 2+2=4

(2) Paris ada di Perancis atau 2+2=5

(3) Paris ada di Inggris atau 2+2=4

(4) Paris ada di Inggris atau 2+2=5

Menurut definisi 4, hanya (4) yang salah. Setiap pernyataan lainnya benar karena setidak-tidaknya satu dari subpernyataannya benar. Sebuah cara yang memudahkan untuk menyatakan definisi 4, adalah dengan menggunakan sebuah tabel sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Sekarang perhatikan pernyataan berikut: “Widodo lahir di Kediri atau di Jakarta”. Jelas bahwa pernyataan tersebut akan benar jika Widodo benar-benar lahir di salah satu kota tersebut dan tidak sekaligus di dua kota tersebut. *Mustahil bukan Widodo Lahir di dua kota?*

Dengan adanya kasus tersebut maka diperlukan untuk mendefinisikan disjungsi secara lain. Dalam hal ini disebut disjungsi eksklusif dan dilambangkan dengan $\underline{\vee}$. Sedangkan disjungsi seperti pada definisi 4 diatas disebut disjungsi inklusif.

Definisi 3.5: Suatu disjungsi eksklusif bernilai benar jika hanya salah satu komponennya bernilai benar.

Sedangkan tabel kebenaran dari disjungsi eksklusif sebagai berikut:

p	q	p $\underline{\vee}$ q
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

3.6 Kondisional (implikasi atau pernyataan bersyarat)

Dari pernyataan p dan pernyataan q dapat dibentuk suatu pernyataan baru yaitu “jika p maka q” yang disebut pernyataan bersyarat atau implikasi. Secara simbolik pernyataan implikasi “jika p maka q” dapat dinyatakan dengan “p $\Rightarrow$ q”

p = a bilangan real

q = kuadrat a tidak negatip

p $\Rightarrow$ q = Jika a bilangan real maka kuadrat a tidak negatip

Pernyataan di atas dapat berarti (1) a bilangan real mengimpli-kasikan kuadrat a tidak negatip (2) a bilangan real syarat cukup untuk kuadrat a tidak negatip (3) a bilangan real hanya jika kuadrat a tidak negatip (4) kuadrat a tidak negatip jika a bilangan real (5) kuadrat a tidak negatip asal saja a bilangan real (6) kuadrat a tidak negatip syarat perlu untuk a bilangan real.

Sehingga pernyataan "$p \Rightarrow q$" dapat dibaca :

Jika p maka q atau

p mengimplikasikan q atau

p syarat cukup untuk q atau

p hanya jika q atau

q jika p atau

q asal saja p atau

q syarat perlu untuk p

Definisi 3.6: Pernyataan $p \Rightarrow q$ selalu bernilai benar kecuali jika p benar dan q salah.

Contoh 11 : Pada zaman penjajahan Jepang terdapat peraturan yang berbunyi "Setiap laki-laki harus ikut wajib militer". Peraturan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk implikasi berikut: "Jika ia laki-laki maka ia harus ikut wajib militer". Sekarang perhatikan beberapa kemungkinan fakta yang muncul:

(1) Kartolo ikut wajib militer

(2) Kartolo tidak ikut wajib militer

(3) Tini ikut wajib militer

(4) Tini tidak ikut wajib militer.

Coba renungkan fakta manakah yang menyalahi peraturan di atas!

Definisi 6 dapat dinyatakan dengan menggunakan tabel berikut:

P	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Dalam implikasi p $\Rightarrow$ q; p disebut anteseden (hipotesis) sedangkan q disebut konklusi (konsekuen)

3.7 Konvers, Invers dan Kontraposisi

Dari pernyataan p $\Rightarrow$ q dapat dibuat pernyataan implikasi lagi dengan cara membalik komponen-komponen pernyataan atau dengan menambahkan negasi pada masing-masing komponen pernyataan.

Definisi 3.7: Pernyataan q $\Rightarrow$ p, ~p $\Rightarrow$ ~q dan ~q $\Rightarrow$ ~p masing-masing merupakan konvers, invers dan kontraposisi dari p $\Rightarrow$ q.

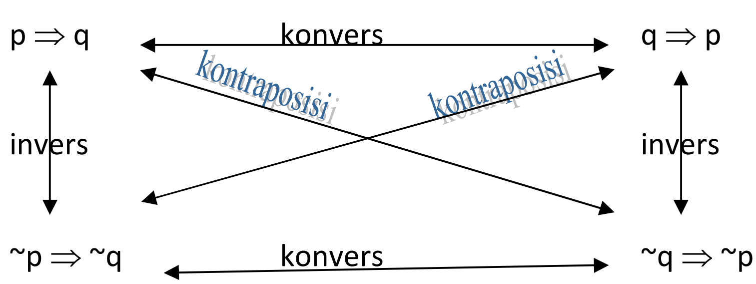
Dari definisi di atas diperoleh,

p $\Rightarrow$ q inversnya adalah ~p $\Rightarrow$ ~q

p $\Rightarrow$ q konversnya adalah q $\Rightarrow$ p

p $\Rightarrow$ q kontraposisinya adalah ~q $\Rightarrow$ ~p

Definisi di atas juga menghasilkan hubungan berikut:



Contoh 12: “Jika a bilangan real positip maka kuadrat a tak negatip”, konversnya adalah “Jika kuadrat a tak negatip maka a bilangan real positip”. Sedangkan inversnya “Jika a bilangan real tidak positip maka kuadrat a negatip”, dan kontraposisinya adalah “Jika kuadrat a negatip maka a bilangan real tidak positip”

Jelas bahwa jika “p $\Rightarrow$ q” bernilai benar maka “q $\Rightarrow$ p” tidak harus selalu benar.

3.8 Bikondisional (biimplikasi)

Dari pernyataan p dan pernyataan q dapat dibentuk suatu pernyataan baru yaitu “p jika dan hanya jika q” yang disebut pernyataan biimplikasi atau implikasi dua arah. Secara simbolik pernyataan biimplikasi “p jika dan hanya jika q” dapat dinyatakan dengan “p $\Leftrightarrow$ q”

p = a bilangan prima

q = a memiliki tepat dua faktor

p $\Leftrightarrow$ q = a bilangan prima jika dan hanya jika a memiliki tepat dua faktor.

Pernyataan di atas dapat berarti (1) jika a bilangan prima maka a memiliki tepat dua faktor (2) a bilangan prima syarat cukup dan perlu untuk a memiliki tepat dua faktor (3) a memiliki tepat dua faktor syarat cukup dan perlu untuk a bilangan prima.

Sehingga pernyataan “p $\Leftrightarrow$ q” dapat dibaca :

p jika dan hanya jika q atau

jika p maka q dan jika q maka p atau

p syarat cukup dan perlu untuk q atau

q syarat cukup dan perlu untuk p

Definisi 3.8: Pernyataan p $\Leftrightarrow$ q bernilai benar jika p dan q memiliki nilai kebenaran yang sama.

Definisi 8 dapat dinyatakan dengan menggunakan tabel berikut:

P	q	p $\Leftrightarrow$ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 12 : Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut :

(1) segitiga ABC samakaki jika dan hanya jika kedua sisinya sama

(2) segitiga ABC sama sisi jika dan hanya jika kedua sisinya sama

(3) 2 + 2 = 5 jika dan hanya jika 5 bilangan prima

(4) 2 + 2 = 5 jika dan hanya jika 4 bilangan prima

Jelas bahwa pernyataan (1) dan (4) bernilai benar, sedangkan yang lainya bernilai salah.

3.9 Kesepakatan Penggunaan Kata Hubung

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai kalimat yang menggunakan kata hubung lebih dari satu. Misalkan: “jika hari ini hujan atau saya memakai mantel maka saya tidak terlambat”. Kalimat di atas ada yang menafsirkan “hari ini hujan atau jika saya memakai mantel maka saya tidak terlambat”. Atau “hari ini hujan atau saya memakai mantel maka saya tidak terlambat”.

Untuk menghindari salah tafsir dari kalimat yang menggunakan lebih dari satu kata hubung maka perlu disepakati adanya urutan pengerjaan (urutan kuat ikat). Disamping itu jika penulisan pernyataan dilakukan secara simbolik akan diperlukan pengunaan tanda kurung. Sedangkan untuk efisiensi penggunaan tanda kurung tersebut urutan kuat ikat ini menjadi salah satu alasannya.

Kesepakatan yang digunakan adalah : (1) negasi; (2) konjungsi atau disjungsi; (3) implikasi dan (4) biimplikasi.

Contoh 13 : berdasarkan kesepakatan di atas maka,

(1) $\sim p \vee q$ berarti $(\sim p) \vee q$

(2) $p \vee q \Rightarrow r$ berarti $(p \vee q) \Rightarrow r$

(3) $p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$ berarti $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

3.10 Latihan

1. Misalkan p adalah “5 bilangan asli habis dibagi lima” dan q adalah “5 adalah bilangan prima”. Tuliskan setiap pernyataan yang ditulis dalam bentuk simbolik kedalam bentuk kalimat verbal.
   a. $\sim p$
   b. $p \wedge q$
   c. $p \vee q$
   d. $q \Leftrightarrow p$
   e. $p \Rightarrow \sim q$
   f. $\sim p \wedge \sim q$
   g. $\sim\sim q$
   h. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow p$
2. Misalkan p adalah “dia tinggi” dan q adalah “dia cantik”. Tuliskan setiap pernyataan berikut dalam bentuk simbolik.
   a. Dia tinggi dan cantik
   b. Dia tinggi tetapi tidak cantik
   c. Tidak benar bahwa dia pendek atau cantik
   d. Dia tidak tinggi dan juga tidak cantik
   e. Dia tinggi atau dia pendek dan cantik
   f. Tidak benar bahwa dia pendek dan tidak cantik
3. Apakah setiap kalimat berikut merupakan pernyataan? Jika ya tentukan nilai kebenarannya.
   a. Irian jaya adalah propinsi paling timur di negara kita.
   b. Aceh adalah propinsi istemewa di negara kita.
   c. Ada kecelakaan, tilpun unit gawat darurat!
   d. Jika $x = 3$ maka $x^2 = 9$
   e. Apa jawabnya
   f. Pulanglah, tinggalkan aku sendiri!
   g. 5 adalah bilangan ganjil dan lima adalah bilangan prima
   h. 5 adalah bilangan positip atau 0 adalah bilangan positip
4. Tuliskan negasi dari setiap pernyataan berikut :
   a. 5 adalah bilangan prima

b. Kucing dapat terbang
c. Beberapa remaja bukan pendisco
d. Aktris Meriam belina pernah memperoleh gramy Award.
e. Semua mahasiswa lulus mata kuliah pengantar dasar matematika
f. $2 + 3 = 5$
g. $8 < 9$
h. tidak ada dua orang yang sama

5. Tulislah negasi dari pernyataan berikut:
   a. H adalah subgrup normal.
   b. Himpunan bilangan real adalah finite.
   c. Kartolo dan Tini memiliki tinggi lebih dari 200 cm.
   d. Tujuh adalah prima atau tiga adalah genap
   e. Jika K himpunan tertutup dan terbatas maka K adalah kompak
   f. M adalah matrik ortogonal
   g. G adalah normal dan H tidak regular
   h. Jika K kompak maka K tertutup dan terbatas
6. Periksalah apakah setiap pasang pernyataan merupakan negasi dari pasangannya
   a. Widodo seorang sarjana. Widodo bukan sarjana.
   b. Semua mahasiswa haus. Seorang mahasiswa tidak haus.
   c. Beberapa ekor kelinci berwarna putih. Beberapa ekor kelinci berwarna hitam.
   d. Semua mahasiswa berdasi hitam. Beberapa mahasiswa berdasi merah.
   e. Semua anak berbaju putih. Seorang anak berbaju hijau.
7. Konstruksilah tabel kebenaran untuk setiap kalimat simbolik berikut ini.
   a. $\sim p \wedge q$
   b. $\sim(p \Rightarrow \sim q)$
   c. $(p \vee q) \wedge (\sim(p \wedge q))$

d. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \wedge p)$

e. $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

f. $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \vee p)$

g. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$

h. $p \Rightarrow (\sim q \vee r)$

i. $(\sim q \wedge r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

j. $\sim(p \wedge (q \vee r)$

k. $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow ((p \wedge r) \vee q)$

l. $(r \wedge \sim q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

8. Tambahkan kurung jika perlu pada pernyataan berikut agar sesuai dengan kesepakatan penggunaan tanda hubung yang sesuai.
   a. $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ konjungsi
   b. $\sim p \vee q \Rightarrow r$ negasi
   c. $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ konditional
   d. $\sim p \vee q \Rightarrow r$ disjungsi
   e. $\sim p \wedge q \Leftrightarrow r$ bikonditional
   f. $\sim p \Rightarrow \sim q$ negasi
9. Ubahlah ungkapan berikut dalam pernyataan konditional
   a. Setiap bilangan real kuadratnya selalu positip
   b. Setiap segitiga jumlah ketiga sudutnya 180^o
   c. Setiap haji beragama islam
   d. Setiap hari jum’at umat islam sholat berjamaah di masjid
   e. Setiap segitiga siku-siku jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miring
10. Tuliskan antesenden dan konklusi dari pernyataan berikut :
    a. Jika x=5 maka f(x)=2
    b. Subgrup adalah syarat cukup untuk subgrup normal
    c. Fungsi adalah syarat perlu untuk relasi

d. Barisan bilangan real chauchy hanya jika barisan tersebut konvergen
e. Ali seorang haji adalah syarat cukup bagi ali beragama islam
f. Semua manusia makan
g. Saya akan kuliah hanya jika tidak hujan
h. Garis g dan garis l sejajar jika garis g dan garis l sebidang

11. Ubahlah kalimat definisi berikut menjadi bentuk bikonditional
    a. Segitiga sama sisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama panjang
    b. Jajargenjang adalah segiempat yang sepasang-sepasang sisinya sejajar
    c. Graph adalah pasangan dari himpunan titik V dan himpunan sisi E yang menghubungkan titik-titik di V.
    d. Relasi dari A ke B adalah sebarang subset dari AxB.
    e. Barisan fibonaci adalah barisan yang suku-sukunya diperoleh dengan menjumlahkan dua suku sebelumnya.
12. Tuliskan invers, konvers dan kontraposisi dari pernyataan-pernyataan berikut:
    a. Jika S adalah himpunan yang memiliki n elemen maka S memiliki tepat 2^n subset.
    b. Jika n adalah jumlah kuadrat dua bilangan bulat ganjil maka n bukan bilangan kuadrat murni.
    c. Jika n adalah bilangan real maka n^2 tidak negatip.
    d. Jika N adalah himpunan semua bilangan asli maka N lengkap.

BAB IV

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

4.1 Tautologi

Sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, suatu pernataan yang selalu bernilai benar. Misalkan "Tini masih perawan atau Tini tidak perawan", pernyataan ini selalu memiliki nilai kebenaran benar untuk setiap kemungkinan nilai komponennya. Pernyataan yang demikian kita sebut tautologi.

Definisi 4.1: Tautologi adalah pernyataan komposit yang selalu bernilai benar.

Contoh 1 : $p = 2 + 2 = 4$ dan $\sim p = 2 + 2 \neq 4$

Maka $p \vee \sim p = 2 + 2 = 4$ atau $2 + 2 \neq 4$ bernilai benar.

Kebenaran contoh di atas dapat dijelaskan sebagai berikut:

p	~p	p ∨ ~p
B	S	B
S	B	B

Contoh 2: Gunakan tabel kebenaran untuk menganalisis bahwa pernyataan

$p \vee [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]$ merupakan tautologi

p	q	r	~q	p∧~q	(p∧~q)⇒r	p ∨ [(p ∧~q)⇒r]
B	B	B	S	S	B	B
B	B	S	S	S	B	B
B	S	B	B	B	B	B
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	S	S	B	B
S	B	S	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B
S	S	S	B	S	B	B

Dari tabel di atas jelas bahwa kolom terakhir selalu benar.

4.2 Kontradiksi

Perhatikan pernyataan "Widodo masih hidup dan sudah mati". Pernyataan tersebut selalu bernilai salah untuk setiap kemungkinan nilai komponennya. Pernyataan yang demikian dinamakan kontradiksi.

Definisi 4.2: Kontradiksi adalah pernyataan komposit yang selalu bernilai salah.

Contoh 3 : $p \equiv 2 + 2 = 4$ dan $\sim p \equiv 2 + 2 \neq 4$

Maka $p \wedge \sim p \equiv 2 + 2 = 4$ dan $2 + 2 \neq 4$ bernilai salah.

Kebenaran contoh di atas dapat dijelaskan sebagai berikut:

p	~p	p ∧ ~p
B	S	S
S	B	S

Contoh 4 : Gunakan tabel kebenaran untuk menganalisis bahwa pernyataan $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ merupakan kontradiksi

p	q	~p	~q	p∧~q	~p∨q	(p ∧ ~q) ∧ (~p ∨ q)
B	B	S	S	S	B	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	S	B	S
S	S	B	B	S	B	S

Dari kolom terakhir dapat dilihat bahwa untuk setiap komponen bernilai salah

Coba Tunjukkan bahwa negasi dari pernyataan kontradiksi adalah pernyataan tautologi.

4.3 Ekuivalensi

Definisi 4.3: Dua buah pernyataan dikatakan ekuivalen jika kedua pernyataan tersebut memiliki nilai kebenaran yang sama.

Dari definisi 3 terkandung makna bahwa pernyataan P dan Q tersebut harus mengandung variabel yang sama, setiap komponen P dan Q memiliki nilai kebenaran yang sama. Sehingga dua pernyataan yang ekuivalen logik merupakan suatu bikonditional yang benar. Dengan kata lain P dan Q ekuivalen jika dan hanya jika bikonditional

$P \Leftrightarrow Q$ merupakan suatu tautologi.

Sehingga P ekuivalen Q dinotasikan dengan "$P \Leftrightarrow Q$" atau "$P \equiv Q$".

Contoh 5 : Buktikan bahwa $p \vee p \equiv p$

p	$p \vee p$
B	B
S	S
(1)	(2)

Dari kolom (1) dan (2) jelas bahwa $p \vee p$ dan p memiliki nilai kebenaran yang sama.

Contoh 6 : Tunjukkan bahwa $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

P	q	~p	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Dari kolom (4) dan (5) jelas bahwa ($p \Rightarrow q$) dan ($\sim p \vee q$) memiliki nilai kebenaran yang sama.

Teorema 1 : jika p, q dan r suatu pernyataan dan B, S masing-masing menyatakan benar dan salah, maka berlaku:

Hukum-hukum		**Keterangan**
1. $p \vee p \equiv p$	1. $p \wedge p \equiv p$	Idempoten
2. $p \vee q \equiv q \vee p$	2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Komutatif
3. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	3. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Assosiatif
4. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	4. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributif
5. $p \vee S \equiv p$	5. $p \wedge B \equiv p$	Identitas
6. $p \vee B \equiv B$	6. $p \wedge S \equiv S$	Identitas
7. $p \vee \sim p \equiv B$	7. $p \wedge \sim p \equiv S$	Negasi
8. $\sim(\sim p) \equiv p$	8. $\sim B \equiv S$; $\sim S \equiv B$	Negasi
9. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	9. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	De Morgan

Bukti sebagai latihan!

Teorema 2 : Jika p dan q suatu pernyataan maka ketiga kondisi berikut ekuivalen:

(a) $\sim p \vee q$ adalah tautologi

(b) $p \wedge \sim q$ adalah kontradiksi

(c) $p \Rightarrow q$ adalah tautologi

Bukti sebagai latihan!

4.4 Latihan

1. Buktikan bahwa $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ adalah tautologi
2. Gunakan teorema 1 untuk menyederhanakan setiap pernyataan komposit berikut:
   (a) $(p \vee q) \wedge \sim p$
   (b) $p \vee (p \wedge q)$
   (c) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
   (d) $\sim(p \vee \sim q)$
   (e) $\sim(\sim p \Rightarrow q)$
   (f) $\sim(p \wedge \sim q)$
   (g) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$
   (h) $\sim(\sim p \Leftrightarrow q)$
   (i) $\sim(\sim p \Rightarrow \sim q)$
3. Tunjukkan untuk setiap pernyataan berikut merupakan tautologi
   a. $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
   b. $\sim q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$
   c. $\sim p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$
   d. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$
   e. $p \wedge q \Rightarrow p$
   f. $p \Rightarrow p \vee q$
   g. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
   h. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
   i. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
   j. $(p \Rightarrow q \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
   k. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$
   l. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$
   m. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

n. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

4. Didefinisikan kata hubung joint denial "◊" yaitu p ◊ q "bukan p maupun bukan q",
   (a) tunjukkan tabel kebenaran untuk p ◊ q
   (b) buktikan bahwa kata hubung $\vee$, $\wedge$ dan ~ dapat dinyatakan sebagai joint denial seperti:
      (i) $\sim p \equiv p \lozenge p$
      (ii) $p \wedge q \equiv (p \lozenge p) \lozenge (q \lozenge q)$
      (iii) $p \vee q \equiv (p \lozenge q) \lozenge (p \lozenge q)$
5. Didefinisikan kata hubung Stroke Sheffer "∇" yaitu p ∇ q "bukan p atau bukan q",
   (a) tunjukkan tabel kebenaran untuk p∇ q
   (b) buktikan bahwa kata hubung $\vee$, $\wedge$, ~ dan $\Rightarrow$ dapat dinyatakan sebagai Stroke Sheffer seperti:
      (i) $\sim p \equiv p \nabla p$
      (ii) $p \vee q \equiv (p \nabla p) \nabla (q \nabla q)$
      (iii) $p \wedge q \equiv (p \nabla q) \nabla (p \nabla q)$
      (iv) $p \Rightarrow q \equiv p \nabla (q \nabla q)$
6. Tunjukkan bahwa disjungsi eksklusif p $\underline{\vee}$ q dan $\sim(p \Leftrightarrow q)$ merupakan ekuivalensi logis.
7. Tunjukkan bahwa $p \underline{\vee} q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
8. Tunjukkan untuk setiap pernyataan berikut merupakan kontradiksi
   a. $p \wedge q \wedge \sim p$
   b. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$

BAB V
KUANTOR

5.1 Fungsi Pernyataan

Definisi 5.1: A suatu himpunan, p(x) merupakan fungsi pernyataan pada A jika p(a) merupakan pernyataan untuk sebarang a $\in$ A. p(x) juga dapat disebut kalimat terbuka pada A.

Sedangkan himpunan a anggota A yang membuat p(a) menjadi pernyataan yang benar disebut himpunan jawab, atau himpunan penyelesaian, atau himpunan kebenaran. Secara simbolik H = $\{ x / x \in A, p(x) \text{ benar} \}$

Contoh 1: Misalkan p(x) adalah $x > 0$. Maka p(x) merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan asli N. Sedangkan himpunan penyelesaian

H = $\{ x / x \in A, x > 0 \} = N$

Contoh 2: Misalkan p(x) adalah $x^2 + x + 1 = 0$. Maka p(x) merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan real R. Sedangkan himpunan penyelesaian H = $\varnothing$

Contoh 3: Misalkan p(x) adalah $x + 5 > 10$. Maka p(x) merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan asli N. Sedangkan himpunan penyelesaian

H = $\{6, 7, 8, \ldots\}$

Contoh 4: Misalkan p(x) adalah $x + 5 > 0$. Maka p(x) bukan merupakan fungsi pernyataan pada himpunan semua bilangan komplek K.

Sekarang perhatikan contoh-contoh di atas. Jika p(x) suatu fungsi pernyataan yang didefinisikan pada suatu himpunan maka p(x) dapat benar untuk semua x pada himpunan tersebut, seperti yang diperlihatkan oleh contoh 1. Sedangkan pada contoh 2 tidak ada satupun anggota R yang membuat p(x) menjadi benar, tetapi pada contoh 3 p(x) benar untuk beberapa x anggota A. Selanjutnya kita tertarik untuk membicarakan p(x) yang dikaitkan dengan semua anggota, atau beberapa anggota himpunan.

5.2 Kuantor Universal

Kata "untuk setiap" atau "untuk semua" disebut kuantor universal dan disimbolkan dengan "$\forall$". Sedangkan simbol "$(\forall x \in A)$. p(x)" dibaca untuk setiap x anggota A berlakulah p(x) atau jika semesta pembicaraan telah disepakati lebih dahulu dapat disingkat "$(\forall x)$. p(x)". Misalkan p(x) adalah fungsi pernyataan pada A. Maka kalimat "untuk setiap x berlakulah p(x)" merupakan suatu pernyataan.

Contoh 5: "$(\forall x \in R)$. $x^2 \geq 0$" yang berarti untuk setiap x anggota R berlaku $x^2 \geq 0$ merupakan pernyataan yang bernilai benar.

Contoh 6: "$(\forall x \in R)$. $x^2 + 5x + 4 = 0$" yang berarti untuk setiap x anggota R berlaku $x^2 + 5x + 4 = 0$, merupakan pernyataan yang bernilai salah.

Suatu kuantor kadang-kadang tidak dinyatakan secara eksplisit. Misalkan, jika x lebih besar dari satu maka x^2 juga lebih besar 1. Pernyataan di atas dapat diartikan sebagai "$(\forall x)$. $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$"

5.3 Kuantor Eksistensial

Kata "ada" atau "beberapa" atau "terdapat paling sedikit satu" disebut kuantor eksistensial dan disimbolkan dengan "$\exists$". Sedangkan simbol "$(\exists x \in A)$. p(x)" dibaca ada x anggota A sedemikian hingga berlakulah p(x) atau jika semesta pembicaraan telah disepakati lebih dahulu dapat disingkat "$(\exists x)$. p(x)". Misalkan p(x) adalah fungsi pernyataan pada A. Maka kalimat "ada x sedemikian hingga berlakulah p(x)" merupakan suatu pernyataan.

Ada beberapa pengarang yang menuliskan kuantor eksistensial dengan simbol "$\exists x \in A \ni p(x)$"

Contoh 7: "$(\exists x \in R).\ x^2 - 5x + 6 = 0$" yang berarti ada x anggota R sedemikian hingga $x^2 - 5x + 6 = 0$, merupakan pernyataan yang benar.

Contoh 8: "$(\exists x \in R).\ x^2 + 1 = 0$" yang berarti ada x anggota R sedemikian hingga
$x^2 + 1 = 0$, merupakan pernyataan yang salah.

Contoh 9 : Terdapat bilangan real positip x sedemikian hingga $x^2 = 5$ dapat ditulis "$(\exists x \in R).\ x^2 = 5$"

Kadangkala suatu kuantor universal dan eksistensial berada serempak dalam suatu pernyataan.

Misalkan, untuk setiap bilangan positip M ada bilangan positip N sedemikian hingga $N < 1/M$. Secara simbolik $(\forall M > 0)\ (\exists N > 0).\ N < 1/M$.

Beberapa bentuk kombinasi kuantor universal dan eksistensial:

$(\exists x)\ (\exists y)$ atau $(\exists x,y)$ dibaca ada x dan y sedemikian hingga berlaku.

$(\forall x)\ (\forall y)$ atau $(\forall x,y)$ dibaca untuk semua x dan y berlaku,

$(\forall x)\ (\exists y)$ dibaca untuk setiap x ada y sedemikian hingga berlaku,

$(\exists x)\ (\forall y)$ dibaca ada x sedemikian hingga untuk setiap y berlaku.

5.4 Negasi dari Pernyataan Berkuantor

Perhatikan pernyataan "semua wanita adalah orang yang lembut" untuk membuat negasi atau ingkaran dari pernyataan tersebut adalah "tidaklah benar bahwa semua wanita adalah orang yang lembut" dengan kata lain terdapat paling sedikit satu wanita yang tidak lembut. Secara simbolik jika himpunan semua wanita W, maka pernyataan di atas dapat ditulis,

$\sim (\forall x \in W)$ (x lembut) $\equiv$ $(\exists x \in W)$ (x tidak lembut)

Selanjutnya jika x lembut $\equiv$ p(x) maka,

$\sim (\forall x \in W)\ p(x) \equiv (\exists x \in W) \sim p(x)$

Sifat ini sering disebut hukum De Morgan.

Dengan cara yang sama,

$\sim (\exists x \in W)\, p(x) \equiv (\forall x \in W) \sim p(x)$

$\sim [(\forall x)\, (\exists y).\ p(x)] \equiv (\exists x) \sim [\,(\exists y)\, p(x,y)] \equiv (\exists x)\, (\forall y) \sim p(x,y)$

$\sim [(\exists x)\, (\forall y).\ p(x,y)] \equiv (\forall x) \sim [\,(\forall y)\, p(x,y)] \equiv (\forall x)\, (\exists y) \sim p(x,y)$

Contoh 10: Pernyataan " untuk setiap $x \in A$, $f(x) > 5$",

simboliknya $(\forall x \in A).\ f(x) > 5$

Negasinya: $(\exists x \in A).\ f(x) \leq 5$

Terdapat x anggota A sedemikian hingga $f(x) \leq 5$

Contoh 11: Terdapat bilangan positip a sedemikian hingga $0 < g(a) \leq 1$

Simboliknya, $(\exists a>0).\ 0 < g(a) \leq 1$

Negasinya : $(\forall a>0).\ g(a) \leq 0$ atau $g(a) > 1$.

Untuk setiap bilangan positip a berlakulah $g(a) \leq 0$ atau $g(a) > 1$.

Contoh 12: Untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada N sedemikian hingga untuk setiap n, jika $n \geq N$ maka untuk setiap $x \in S$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Simboliknya, $(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists N)\, (\forall n).\ n \geq N \Rightarrow (\forall x \in S), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Negasinya, $(\exists \varepsilon > 0) \sim [(\exists N)\, (\forall n).\ n \geq N \Rightarrow (\forall x \in S), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

atau $(\exists \varepsilon > 0) \sim [(\exists N)\, (\forall n).\ n \geq N \Rightarrow (\forall x \in S), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

atau $(\exists \varepsilon > 0)\, (\forall N) \sim [\,(\forall n).\ n \geq N \Rightarrow (\forall x \in S), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

atau $(\exists \varepsilon > 0)\, (\forall N)\, (\exists n). \sim [\ n \geq N \Rightarrow (\forall x \in S), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

atau $(\exists \varepsilon > 0)\, (\forall N)\, (\exists n).\ n \geq N \wedge \sim [\ (\forall x \in S), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

atau $(\exists \varepsilon > 0)\, (\forall N)\, (\exists n).\ n \geq N \wedge (\exists x \in S), |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Pada kenyataanya penting diketahui bahwa urutan dalam kuantor tak dapat dibalik. Misalkan, jika diberikan sebarang bilangan real x selalu dapat ditemukan bilangan y yang lebih besar dari x. Secara simbolik, $(\forall x)\, (\exists y).\ y > x$ merupakan pernyataan yang benar. Sedangkan ada bilangan y sedemikian hingga untuk setiap x berlaku bahwa y lebih dari x, secara simbolik $(\exists y)\ (\forall x).\ y > x$ merupakan pernyataan yang salah.

5.5 Contoh Penyangkal

Menurut hukum De Morgan, $\sim (\forall x \in W)\ p(x) \equiv (\exists x \in W) \sim p(x)$. Sehingga untuk memperlihatkan bahwa suatu pernyataan $(\forall x).\ p(x)$ salah maka akan ekuivalen dengan $(\exists x) \sim p(x)$ benar. Berarti harus ditunjukkan bahwa ada sebuah elemen a dengan sifat bahwa p(a) salah. Sebuah elemen a seperti itu disebut contoh penyangkal (counter example) pada pernyataan $(\forall x).\ p(x)$.

Contoh 13: Tentukan kebenaran pernyataan $(\forall x).\ |x| > 0$. Pernyataan tersebut salah karena untuk $x = 0$ maka $|0| = 0$.

5.6 Latihan

1. Misalkan $p(x) \equiv x + 5 = 1$. Apakah p(x) merupakan fungsi pernyataan pada,
   a. himpunan semua bilangan asli N
   b. himpunan semua bilangan rasional Q
   c. himpunan semua bilangan real R
   d. himpunan semua bilangan komplek K
2. Misalkan $p(x) \equiv x + 5 > 1$. Apakah p(x) merupakan fungsi pernyataan pada,
   a. himpunan semua bilangan asli N
   b. himpunan semua bilangan rasional Q
   c. himpunan semua bilangan real R
   d. himpunan semua bilangan komplek K
3. Misalkan R himpunan semua bilangan real merupakan semesta, tentukan nilai kebenaran setiap pernyataan berikut:
   a. $(\forall x).\ |x| = x$
   b. $(\forall x).\ x^2 = x$

  c. $(\forall x).\ |x| = 0$
  d. $(\forall x).\ |x| > x$
  e. $(\forall x).\ x + 1 > x$
  f. $(\exists x).\ |x| = 0$
  g. $(\exists x).\ x + 10 > x$
  h. $(\exists x).\ x^2 + x + 10 = 0$
4. Tentukan negasi dari pernyataan dalam soal 3.
5. Misalkan A = {1, 2, 3}, periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut:
  a. $(\forall x).\ x > 3$
  b. $(\forall x).\ x = 1$
  c. $(\forall x).\ |x| = x$
  d. $(\exists x).\ |x| = 0$
  e. $(\exists x).\ x + 1 = 0$
6. Tentukan negasi dari pernyataan dalam soal 5.
7. Tuliskan negasi dari setiap pernyataan berikut:
  a. Setiap kursi memiliki empat kaki
  b. Beberapa pensil berwarna merah
  c. Setiap orang suka Widodo
  d. $(\exists x > 1).\ F(x) = 3$
  e. $(\forall x \in A)\ (\exists y \in B).\ x < y < 1$
  f. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z).\ x + y + z \leq xyz$
  g. $(\exists x \leq 2).\ f(x) < 2$ atau $g(x) \geq 7$
8. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut, jika semestanya R.
  a. $(\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z).\ x + y = z$
  b. $(\exists x)\ (\forall y)\ (\forall z).\ x + y = z$
  c. $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z).\ x + y = z$
  d. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z).\ x + y = z$

e. $(\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z).\ x\,z = y$

f. $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z).\ x\,z = y$

g. $(\exists x)\ (\forall y)\ (\forall z)$. jika $z > y$ maka $z > x + y$

h. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)$. jika $z > y$ maka $z > x + y$

i. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)$. jika $z > y$ maka $z > x + y$

j. $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)$. jika $z > y$ maka $z > x + y$

9. Carilah contoh penyangkal (counter example) dari setiap pernyataan untuk $S = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ agar diketahui bahwa pernyataan tersebut salah.

   a. $(\forall x).\ x + 3 \geq 7$

   b. $(\forall x)$. x ganjil

   c. $(\forall x)$. x prima

   d. $(\forall x).\ |x| = -x$

10. Tulislah definisi berikut hanya dengan menggunakan simbolik seperti, $\exists$, $\forall$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$ dan $\vee$, selanjudnya tentukan negasinya dalam bentuk simbolik maupun dalam bentuk kalimat verbal.

    a. Suatu fungsi f dikatakan genap (even) jika dan hanya jika untuk setiap x, $f(-x) = f(x)$

    b. Suatu fungsi f dikatakan periodik jika dan hanya jika ada $k > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x, $f(x+k) = f(x)$

    c. Suatu fungsi f dikatakan naik (increasing) jika dan hanya jika untuk setiap x dan untuk setiap y, jika $x \leq y$ maka $f(x) \leq f(y)$.

    d. Suatu fungsi f dikatakan naik kuat (stricly increasing) jika dan hanya jika untuk setiap x dan untuk setiap y, jika $x < y$ maka $f(x) < f(y)$.

    e. Suatu fungsi $f : A \to B$ dikatakan satu-satu (injective) jika dan hanya jika untuk setiap x dan y di A, jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$.

    f. Suatu fungsi $f : A \to B$ dikatakan onto (surjective) jika dan hanya jika untuk setiap x di B ada y di A sedemikian hingga $f(x) = y$.

g. Suatu fungsi $f : D \rightarrow R$ dikatakan Kontinu pada $c \in D$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian hingga, $| f(x) - f(c) | < \varepsilon$ jika $|x - c| < \delta$ dan $x \in D$.

BAB VI
METODE PEMBUKTIAN

Matematika adalah satu-satunya hasil kerja keras manusia yang sangat mementingkan logika dan pembuktian. Kemampuan berpikir logik dan membaca pembuktian benar-benar akan memperluas pemahaman matematik dan yang lebih penting ketrampilan ini memudahkan kita untuk mengaplikasikan ide-ide matematik diberbagai situasi baru. Dalam bab ini akan diduskusikan beberapa metode dasar pembuktian, sehingga dimiliki kerangka logik untuk melakukan pembuktian yang lebih baik. Teorema adalah salah satu perwujudan dari obyek matematika yang disebut "prinsip". Seperti telah dijelaskan pada bab II, bahwa teorema merupakan pernyataan yang masih perlu dibuktikan kebenarannya.

Untuk membuktikan suatu teorema biasanya dimulai dengan pernyataan-pernyataan tertentu yang telah diterima nilai kebenarannya, selanjutnya berargumentasi menuju pada kesimpulan. Pernyataan-pernyataan yang digunakan untuk menarik kesimpulan disebut premis. Sedangkan kesimpulan yang diambil dalam suatu argumentasi disebut konklusi. Argumen adalah kumpulan pernyataan yang terdiri dari satu atau lebih premis dan satu konklusi. Sehingga konklusi seharusnya diturunkan hanya dari premis-premis.

Dalam suatu pembuktian teorema, premis dapat berupa aksioma, definisi atau teorema yang telah dibuktikan sebelumnya. Untuk menentukan apakah argumen tertentu valid atau tidak, dapat digunakan tabel kebenaran yang sesuai dengan argumen tersebut.

Validitas pembuktian diklasifikasikan sebagai bukti langsung dan bukti tidak langsung.

6.1 Bukti Langsung

6.1.1 Modus ponens

Argumen modus ponen ini merupakan argumen yang paling sering digunakan. Jika suatu pernyataan kondisional benar dan diketahui hipotesisnya benar maka konklusinya pastilah benar. Secara simbolik sering dinyatakan sebagai,

Premis 1 $\equiv p \Rightarrow q$

Premis 2 $\equiv p$

Konklusi $\equiv q$

Argumen di atas dapat dibaca "*jika p maka q benar, p benar karena itu q benar*" atau "*jika p maka q benar dan p benar, jadi q benar*"

Bukti:

p	***q***	***p⇒q***	***(p⇒q) ∧ p***	***(p⇒q) ∧ p ⇒q***
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Contoh 1: Periksalah validitas argumen berikut:

a. Premis 1.: jika p > 2 bilangan prima maka p ganjil

   Premis 2 : 5 bilangan prima

   Konklusi : 5 adalah bilangan ganjil

b. Premis 1 : jika saya lulus ujian maka saya bahagia

   Premis 2 : Saya bahagia

   Konklusi : Saya lulus ujian

Jelas bahwa argumen (a) valid karena memenuhi hukum modus ponen, sedangkan argumen (b) tidak valid

6.1.2 Modus tolen

Argumen modus tolen ini menyatakan bahwa suatu pernyataan konditional bernilai benar dan diketahui negasi konklusinya benar maka negasi dari hipotesisnya haruslah benar. Secara simbolik dapat dinyatakan sebagai,

Premis 1 $\equiv p \Rightarrow q$

Premis 2 $\equiv \sim q$

Konklusi $\equiv \sim p$

Bukti:

P	q	~p	~q	p⇒q	(p⇒q) ∧ ~q	(p⇒q) ∧ ~q ⇒ ~p
B	**B**	**S**	**S**	**B**	**S**	**B**
B	**S**	**S**	**B**	**S**	**S**	**B**
S	**B**	**B**	**S**	**B**	**S**	**B**
S	**S**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**

Contoh 2 : Periksalah validitas argumen berikut:

a. Premis 1: jika hari ini ada ujian maka saya belajar

   Premis 2: Saya tidak belajar

   Konklusi: Hari ini tak ada ujian

b. Premis 1 : Jika p>2 bilangan prima maka p bilangan ganjil

   Premis 2 : 2 bilangan genap

   Konklusi : 2 bukan bilangan prima

Jelas bahwa argumen (a) valid karena memenuhi hukum modus tolen, sedangkan argumen (b) tidak valid

6.1.3 Modus barbara/ silogisma

Perhatikan pernyataan "jika x bilangan real, $x^2 - 1 = 0$ maka x = -1 atau x = 1". Pernyataan tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut, Jika $x^2 - 1 = 0$ maka $(x-1)(x+1) = 0$

Jika $(x-1)(x+1) = 0$ maka $x = 1$ atau $x = -1$

Jadi jika $x^2 - 1 = 0$ maka $x = 1$ atau $x = -1$

Secara tidak sadar hukum silogisma (modus barbara) telah dipakai dalam pembuktian di atas. Jika argumen di atas dinyatakan secara simbolik,

Premis I $\equiv p \Rightarrow q$

Premis II $\equiv q \Rightarrow r$

Konklusi $\equiv p \Rightarrow r$

p	*q*	*r*	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$	$((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r))\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	B	B	B	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Contoh 3: Periksalah validitas argumen berikut:

a. Premis 1 : Jika saya cocok maka saya akan ikut

   Premis 2 : Jika saya ikut maka saya akan sungguh-sungguh

   Konklusi: Jika saya cocok maka saya akan sungguh- sungguh

b. Premis 1 : Jika saya tahu maka saya akan mengatakannya

   Premis 2 : Jika saya tahu maka saya akan minta maaf

   Konklusi : Jika saya mengatakannya maka saya minta maaf

Jelas bahwa argumen (a) valid karena memenuhi hukum modus barbara, sedangkan argumen (b) tidak valid

6.1.4 Silogisma disjungtif

Premis I $\equiv$ p $\vee$ q

Premis II $\equiv$ ~q

Konklusi $\equiv$ p

Bukti :

p	***q***	***p∨q***	***~q***	***p∨q∧(~q)***	***((p∨q)∧(~q))⇒p***
B	B	B	S	S	B
B	S	B	B	B	B
S	B	B	S	S	B
S	S	S	B	S	B

Contoh 4: Periksalah validitas argumen berikut,

a. Premis 1: Saya merokok atau saya tidur

   Premis 2: Saya tidak tidur

   Konklusi: Saya merokok

b. Premis 1 : p bilangan prima atau p bilangan genap

   Premis 2 : p bilangan genap

   Konklusi : p bukan bilangan prima

Jelas bahwa argumen (a) valid karena memenuhi hukum silogisma disjungtif, sedangkan argumen (b) tidak valid

Pada contoh (b) premis 1 merupakan disjungsi inklusif karena p dan q dapat sekaligus bernilai benar. Misalkan pada contoh (b) di atas premis pertama merupakan disjungsi eksklusif maka argumen tersebut adalah valid. Hal ini dapat dinyatakan sebagai berikut, Premis I ≡ $p \veebar q$

Premis II ≡ q

Konklusi ≡ ~p

Bukti :

p	***q***	$p \veebar q$	***~p***	$(p \veebar q) \wedge q$	$((p \veebar q) \wedge q)) \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	S	B
B	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B
S	S	S	B	S	B

Contoh 5: argumen berikut, mengikuti hukum silogisma disjungsi eksklusif

Premis 1 : Widodo lahir Surabaya di atau lahir di Kediri

Premis 2 : Widodo lahir di Kediri

Konklusi: Widodo tidak lahir di Surabaya

6.1.5 Dilema konstruktif

Premis I ≡ $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

Premis II ≡ $p \vee r$

Konklusi ≡ $q \vee s$

Contoh 6: Argumen berikut mengikuti sifat dilema konstruktif.

Premis I ≡ Jika saya menangis maka saya akan dirumah tetapi jika saya senang maka pacar saya bahagia

Premis II ≡ Saya menangis atau pacar saya senang

Konklusi ≡ Saya akan dirumah atau pacar saya bahagia

[((p	$\Rightarrow$	q)	$\wedge$	(r	$\Rightarrow$	s))	$\wedge$	(p	$\vee$	r)]	$\Rightarrow$	(q	$\vee$	s)
B	B	B	B	B	B	B	B		B		B		B	
B	B	B	S	B	S	S	S		B		B		B	
B	B	B	B	S	B	B	B		B		B		B	
B	B	B	B	S	B	S	B		B		B		B	
B	S	S	S	B	B	B	S		B		B		B	
B	S	S	S	B	S	S	S		B		B		S	
B	S	S	S	S	B	B	S		B		B		B	
B	S	S	S	S	B	S	S		B		B		S	
S	B	B	B	B	B	B	B		B		B		B	
S	B	B	S	B	S	S	S		B		B		B	
S	B	B	B	S	B	B	S		S		B		B	
S	B	B	B	S	B	S	S		S		B		B	
S	B	S	B	B	B	B	B		B		B		B	
S	B	S	S	B	S	S	S		B		B		S	
S	B	S	B	S	B	B	S		S		B		B	
S	B	S	B	S	B	S	S		S		B		S	
(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)	(5)		(4)		(7)		(6)	

Dari tabel di atas kolom (7) selalu bernilai benar atau pernyataan di atas merupakan tautologi. Dengan kata lain argumen dari dilema konstruktif valid.

6.1.6 Dilema destruktif

Premis I $\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$

<u>Premis II $\equiv {\sim}q \vee {\sim}s$</u>

Konklusi $\equiv {\sim}p \vee {\sim}r$

Contoh 7: Argumen berikut mengikuti hukum dilema destruktif

Premis I ≡ Jika matahari bersinar maka udara terasa panas tetapi jika saya banyak uang maka pacar saya bahagia

Premis II≡ Udara tidak terasa panas atau pacar saya tidak bahagia

Konklusi ≡ Matahari tidak bersinar atau saya tidak banyak uang

Bukti :

[((p	⇒	q)	∧	(r	⇒	s))	∧	(~q	∨	~s)]	⇒	(~p	∨	~r)
B	B	B	B	B	B	B	S	S	S	S	B	S	S	S
B	B	B	S	B	S	S	S	S	B	B	B	S	S	S
B	B	B	B	S	B	B	S	S	S	S	B	S	B	B
B	B	B	B	S	B	S	B	S	B	B	B	S	B	B
B	S	S	S	B	B	B	S	B	B	S	B	S	S	S
B	S	S	S	B	S	S	S	B	B	B	B	S	S	S
B	S	S	S	S	B	B	S	B	B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	S	B	S	S	B	B	B	B	S	B	B
S	B	B	B	B	B	B	S	S	S	S	B	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	S	S	B	B	B	B	B	S
S	B	B	B	S	B	B	S	S	S	S	B	B	B	B
S	B	B	B	S	B	S	B	S	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	B	B	B	B	B	B	S	B	B	B	S
S	B	S	S	B	S	S	S	B	B	B	B	B	B	S
S	B	S	B	S	B	B	S	B	S	S	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	S	B	S	B	B	B	B	B
1	2	1	3	1	2	1	5	2	3	2	6	2	3	2

Dari tabel di atas kolom (6) selalu bernilai benar atau pernyataan di atas merupakan tautologi. Dengan kata lain argumen dari dilema destruktif valid.

6.1.7 Konjungsi

Premis I $\equiv$ p

Premis II $\equiv$ q

Konklusi $\equiv$ p $\wedge$ q

Bukti :

Pernyataan p bernilai benar dan pernyataan q juga bernilai benar. Jadi p $\wedge$ q haruslah benar.

Contoh 8: Argumen berikut adalah valid.

Premis I $\equiv$ 2 bilangan genap

Premis II $\equiv$ 2 bilangan prima

Konklusi $\equiv$ 2 bilangan genap dan bilangan prima

6.1.8 Addition

Premis I $\equiv$ p

Konklusi $\equiv$ p $\vee$ q

Bukti :

Jika pernyataan p bernilai benar maka apapun nilai q (benar atau salah) p $\vee$ q selalu benar.

Contoh 9: argumen berikut adalah valid

Premis I $\equiv$ 20 habis dibagi lima

Konklusi $\equiv$ 20 habis dibagi 5 atau 20 bilangan ganjil

6.2 Bukti Tidak Langsung

6.2.1 Bukti dengan kontraposisi

Pembuktian dengan kontraposisi ini, dilandasi bahwa suatu pernyataan konditional ekuivalensi logis dengan kontraposisinya. Kita telah membuktikan pada bab sebelumnya bahwa ~q $\Rightarrow$ ~p $\equiv$ p $\Rightarrow$ q, sehingga argumen dengan kontraposisi juga merupakan argumen yang valid.

Premis 1 $\equiv$ ~q $\Rightarrow$ ~p

Konklusi $\equiv$ p $\Rightarrow$ q

Contoh 14: Buktikan teorema “Jika a+b > 10 maka a>5 atau b>5”

Bukti :

Teorema di atas berbentuk p $\Rightarrow$ q dengan

p $\equiv$ a+b > 10 dan

q $\equiv$ a>5 atau b>5

Sedangkan ~p $\equiv$ a+b $\leq$ 10 dan ~q $\equiv$ a $\leq$ 5 dan b $\leq$ 5

Sehingga jika a $\leq$ 5 dan b $\leq$ 5 maka a+b $\leq$ 5 + 5 = 10

Jadi jika ~q benar maka terbukti ~p juga benar

Contoh 15: Buktikan bahwa “jika n bilangan bulat dan n^2 ganjil maka n ganjil”

Bukti:

Akan dibuktikan dengan kontraposisi, sehingga yang harus dibuktikan “Jika n bilangan bulat dan n genap maka n^2 genap”

Misalkan n bilangan bulat genap.

Berarti n=2p, untuk suatu p bilangan bulat

$n^2 = (2p)^2 = 4\,p^2 = 2(2p^2)$

sehingga n^2 genap.

Contoh 16: Buktikan teorema “jika 7m adalah ganjil maka m adalah ganjil”

Jawab :

Untuk membuktikan teorema di atas dengan bukti langsung nampaknya akan kesulitan. Sekarang akan dibuktikan dengan menggunakan bukti kontraposisi. Kontraposisi dari teorema di atas adalah “jika m tidak ganjil maka 7m tidak ganjil”.

Hipotesis “m tidak ganjil” yang berarti “m adalah genap”

m = 2k untuk suatu k $\in$ B

7m = 7(2k)

7m = 2(7k) , karena k $\in$ B, 7k bilangan bulat

Konklusi : "7m adalah bilangan genap"

Karena kontraposisi dari teorema di atas benar, sehingga menyebabkan teorema tersebut benar.

6.2.2 Bukti dengan kontradiksi

Model pembuktian ini agak lain dari model pembuktian yang ada, tetapi sering digunakan dalam membuktikan teorema dalam matematika analisis. Terdapat dua bentuk bukti dengan kontradiksi. Pertama untuk membuktikan bahwa pernyataan p benar, ditunjukkan bahwa $\sim$ p suatu pernyataan yang salah atau kontradiksi. Kedua, untuk membuktikan teorema $p \Rightarrow q$, dengan mengasumsikan bahwa p dan ~q bernilai benar dan mendeduksikan pernyataan C yang bernilai salah. Karena $p \wedge \sim q \Rightarrow C$ bernilai benar dan C bernilai salah maka dapat disimpulkan bahwa $p \wedge \sim q$ dalam kalimat konditional ini bernilai salah. Sehingga $\sim(p \wedge \sim q) \equiv p \Rightarrow q$ bernilai benar.

Secara simbolik argumen di atas dapat ditulis sebagai:

Bentuk Pertama,

Premis 1 $\equiv \sim p \Rightarrow C$

Konklusi $\equiv$ p

Bukti:

p	***~p***	***C***	***~p⇒ C***	***~p⇒ C⇔ p***
B	S	S	B	B
S	B	S	S	B
1	2	3	4	5

Dari kolom 5, diperoleh bahwa argumen di atas adalah valid.

Contoh 17: Buktikan bahwa "Widodo lahir di Kediri" benar, maka cukup ditunjukkan bahwa "Widodo tidak lahir di Kediri" adalah salah.

Bentuk kedua,

Premis 1 ≡ p∧~q⇒C

Konklusi ≡ p ⇒ q

Bukti :

p	*q*	*~q*	*p∧~q*	*C*	*p∧~q⇒C*	*p⇒q*	*[p∧~q⇒C]⇔ p⇒q*
B	B	S	S	S	B	B	B
B	S	B	B	S	S	S	B
S	B	S	S	S	B	B	B
S	S	B	S	S	B	B	B
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

Jelas bahwa kolom (6) dan (7) ekuivalen, akibatnya (8) tautologi.

Contoh 18: Teorema "Misalkan x bilangan real. Jika x > 0 maka $\frac{1}{x} > 0$"

Bukti:

Secara simbolik bentuk di atas : p ⇒ q dengan,

p ≡ x > 0

q ≡ $\frac{1}{x} > 0$

Menurut argumen bentuk kedua, p∧~q⇒C ≡ p ⇒ q.

Sehingga dimulai dengan memisalkan x > 0 dan $\frac{1}{x} \leq 0$.

Karena, x > 0 maka dapat dikalikan dengan kedua ruas pertidaksamaan, $(x)(\frac{1}{x}) \leq (x)(0)$ ⇔1 ≤ 0, kontradiksi dengan kenyataan bahwa 1 > 0.

Jadi benar bahwa "Jika x > 0 maka $\frac{1}{x} > 0$"

6.2.3 Bukti dengan contoh penyangkal (counter example)

Untuk membuktikan bahwa suatu teorema yang benar maka harus dapat ditunjukkan bahwa teorema benar untuk semua contoh yang diberikan. Tetapi untuk membuktikan suatu sifat atau suatu teorema yang salah maka cukup ditunjukkan bahwa teorema tidak benar untuk sebuah contoh. Counter example ini digunakan untuk membuktikan bahwa untuk setiap x tidak berlakulah p(x) benar atau untuk setiap x berlakulah p(x) salah. Untuk membuktikan bahwa untuk setiap x berlakulah p(x) salah maka cukup ditunjukkan bahwa untuk sebuah elemen dalam semesta tersebut tidak memenuhi sifat p(x). Diketahui bahwa biasanya teorema dinyatakan dalam bentuk konditional ($p \Rightarrow q$) sehingga untuk membuktikan dengan counter example ini pernyataan tersebut perlu dinyatakan secara eksplisit dalam bentuk kuantor. Karena counter example ini membuktikan salahnya suatu teorema, sehingga model pembuktian ini banyak digunakan dalam pengembangan perluasan semesta suatu teorema.

Contoh 19: Buktikan salah satu teorema dalam kalkulus berikut "Misalkan I = [a,b] dan f : I $\rightarrow$ R. Jika f memiliki turunan pada c $\in$ I maka f kontinu pada c

Bukti :

Teorema di atas dapat dinyatakan dalam bentuk kuantor *"untuk setiap c $\in$ I dan f memiliki turunan pada c pastilah f kontinu pada c"*

Ambil sebarang x $\in$ I, x$\neq$c maka,

$$f(x)-f(c)=\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)(x-c)$$

karena f'(c), maka

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c))=\left(\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)(\lim_{x\to c}(x-c))$$

$$= f'(c).0 = 0$$

Jadi $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, yang berarti f kontinu pada c.

Apakah teorema di atas konversnya masih benar? Jika ya, maka teorema di atas akan berbentuk bikonditional (p⇔q).

Berarti harus dibuktikan bahwa ”Misalkan I=[a,b] dan f: I $\rightarrow$ R. Jika f kontinu pada c $\in$ I maka f memiliki turunan pada c” atau *“untuk setiap c $\in$ I dan f kontinu pada c $\in$ I pastilah f memiliki turunan pada c”.*

Misalkan f(x) = |x|, x $\in$ R

Jelas bahwa f kontinu pada x=0 (karena $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$)

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$, sehingga

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1, sedangkan \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1$$

berarti f tidak memiliki turunan pada 0.

Jadi f kontinu pada c tidak cukup untuk menunjukkan bahwa f memiliki turunan pada c.

Contoh 20: Diketahui fungsi f(n) = n^2 + n + 17

f(1) = 19

f(2) = 23

f(3) = 29

f(4) = 37

….

f(12) = 173

….

f(15) = 257

Dari data di atas dibuat suatu konjengtur bahwa jika n bilangan bulat positip maka f(n) selalu bilangan prima. Jika ditulis dalam simbolik maka $(\forall n \in N)$. p(n), dengan p(n) adalah n^2+n+17 prima. Sekarang timbul pertanyaan, apakah pernyataan tersebut benar? Jika benar bagaimana bukti detailnya? Untuk membuktikan kebenaran konjengtur tersebut, salah satu jalan dengan menggunakan induksi matematika, karena p(n) melibatkan bilangan asli. Kenyataanya kita sulit untuk membuktikannya. Sekarang timbul pertanyaan, apakah konjengtur tersebut salah? Jika salah bagaimana membuktikannya? Karena konjengtur tersebut merupakan kuantor universal, maka untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut salah, cukup ditunjukkan sebuah contoh yang membuat pernyataan tersebut salah. Salah satu contoh ini disebut contoh penyangkal (counter example).

Salah satu contoh penyangkal adalah n=16.

$f(16) = 16^2 + 16 + 17 = 16(16+1) + 17 = 17^2$

Jelas bahwa bukan bilangan prima, sehingga $(\forall n \in N)$. p(n) salah.

Demikian telah ditunjukkan peranan counter example dalam menunjukkan validitas suatu teorema.

6.3 Induksi matematika

Salah satu alat penting yang dapat digunakan untuk membuktikan suatu teorema yang melibatkan bilangan asli adalah prinsip induksi matematika. Sebab tak mungkin kita memeriksa setiap bilangan asli satu-persatu, dalam suatu fungsi pernyataan. Terdapat dua versi induksi matematika, pertama dimulai dari aksioma peano, dan kedua dimulai dari aksioma urutan terbaik. Sedangkan yang akan dibahas berikut adalah versi kedua, tetapi versi pertama dapat dibaca dalam tulisan lepas khusus mengenai induksi matematika (Widodo, 2000).

Aksioma (Well-Ordering Property of N)

Jika S subset yang tak kosong dari himpunan bilangan asli N, maka ada elemen m $\in$ S sedemikian hingga m $\leq$ k, untuk setiap k $\in$ S.

Teorema 1: (principle of mathematical induction) Misalkan P(n) adalah suatu fungsi pernyataan pada bilangan asli N. Maka P(n) adalah benar untuk setiap n $\in$ N jika dipenuhi:

(b) P(1) benar dan,

(i) untuk setiap k $\in$ N, jika P(k) benar maka P(k+1) benar.

Bukti :

Akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi.

Andaikan (b) dan (I) berlaku dan P(n) salah untuk suatu n $\in$ N.

Misalkan, S = { n $\in$ N/ P(n) salah}

Maka S tidak kosong dan menurut aksioma (Well-Ordering Property of N) dijamin ada elemen m $\in$ S sehingga merupakan elemen terkecil S. Karena P(1) benar dengan hipotesis (b) maka 1 $\notin$ S, berarti m $>$ 1. Sehingga m-1 adalah bilangan asli, dan karena m elemen terkecil di S maka m-1 $\notin$ S. Tetapi, karena m-1 $\notin$ S haruslah P(m-1) benar. Sekarang di substitusikan ke hipotesis (i) dengan k=m-1 maka P(k+1)=P(m) benar. Akibatnya m $\notin$ S, kontradiksi dengan m sebagai elemen terkecil S.

Contoh 10: Buktikan bahwa 1+ 2+3+ … +n = ½ n(n+1) untuk setiap bilangan asli N.

Bukti:

P(n) $\equiv$ 1+ 2+3+ … +n = ½ n(n+1)

(b) P(1) $\equiv$ 1 = ½ 1(1+1) berlaku.

(i) misalkan untuk setiap k $\in$ N, P(k) benar, berarti

1+ 2+3+ … +k = ½ k(k+1) maka

akan ditunjukkan bahwa P(k+1) benar,

$[1 + 2 + 3 + \ldots + k] + (k+1) = \frac{1}{2} k(k+1) + (k+1)$

$= \frac{1}{2} [k(k+1) + 2(k+1)]$

$= \frac{1}{2} (k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{2} (k+1)[(k+1)+1]$

Jadi P(k+1) benar bilamana P(k) benar, sehingga hipotesis (i) berlaku dan menurut prinsip induksi P(n) benar untuk setiap $n \in N$.

Contoh 11: Buktikan bahwa $7^n - 4^n$ habis dibagi 3 untuk setiap $n \in N$.

Bukti:

$P(n) \equiv 7^n - 4^n$ habis dibagi 3

(b) $P(1) \equiv 7^1 - 4^1 = 3$ habis dibagi 3, benar.

(i) jika untuk setiap $k \in N$, $7^k - 4^k$ habis dibagi 3 benar maka akan ditunjukkan bahwa $7^{k+1} - 4^{k+1}$ habis dibagi 3 juga benar.

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7^{k+1} + 7.4^k - 7.4^k - 4^{k+1}$

$= 7(7^k - 4^k) + 3.4^k$

$= 7(3m) + 3.4^k$

$= 3(7m + 4^k)$

Jadi $7^{k+1} - 4^{k+1}$ habis dibagi 3.

Teorema 2: Misalkan $m \in N$ dan P(n) adalah fungsi pernyataan untuk setiap $n \geq m$. Maka P(n) benar untuk setiap $n \geq m$, jika dipenuhi:

(b) P(m) benar dan,

(i) untuk setiap $k \geq m$, jika P(k) benar maka P(k+1) benar.

Bukti:

Untuk setiap $r \in N$, misalkan Q(r) merupakan pernyataan "P(r+m-1) benar". Maka dengan hipotesis (b) *teorema 1* Q(1) berlaku, sedangkan untuk $j \in N$, misalkan Q(j) berlaku, yang berarti P(j+m-1) benar.

Karena $j \in N$ maka $j+m-1 = m + (j-1) \geq m$, menurut hipotesis (i) P(j+m) harus benar. Jadi Q(j+1) berlaku. Sehingga Q(r) berlaku untuk setiap $r \in N$.

Jika $n \geq m$ misalkan $r = n-m+1$ maka $r \in N$. Karena $Q(r)$ berlaku, $P(r+m-1)$ adalah benar. Tetapi $P(r+m-1) = P(n)$ adalah benar untuk setiap $n \geq m$.

Contoh 12: Buktikan bahwa $n! > 2^n$ untuk setiap $n \geq 4$.

Bukti:

(b) jika $n = 4$, maka $4! = 24 > 2^4 = 16$ benar.

(i) misalkan untuk $k \geq 4$, $k! > 2^k$ maka akan ditunjukkan bahwa $(k+1)! > 2^{k+1}$.

$(k+1)! = (k+1)k!$

$> 2k! > 2.\ 2^k > 2^{k+1}$.

Jadi $n! > 2^n$ untuk setiap $n \geq 4$

Teorema 3: (principle of strong mathematical induction) Misalkan P(n) adalah suatu fungsi pernyataan pada bilangan asli N. Maka P(n) adalah benar untuk setiap $n \in N$ jika dipenuhi:

(b) P(1) benar dan,

(i) untuk setiap $k \in N$, jika P(k) benar untuk setiap bilangan asli j sedemikian hingga $1 \leq j \leq k$ maka P(k+1) benar.

Bukti:

Misalkan P(n) memenuhi hipotesis dari induksi matematika kuat. Misalkan Q(n) merupakan pernyataan "P(j) benar" Untuk setiap $1 \leq j \leq k$. Maka dengan menggunakan *teorema 1* (b) Q(1) berlaku. Sedangkan menurut (i) untuk $k \in N$, misalkan Q(k) benar, yang berarti P(k) benar maka Q(k+1) benar yang berarti P(k+1) benar. Sehingga untuk setiap $n \in N$, Q(n) benar, yang mengimplikasikan P(n) benar untuk setiap $n \in N$.

Contoh 13: (F_n) adalah barisan fibonacci jika

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{untuk } n=1 \\ 1 & \text{untuk } n=2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Atau 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

(L_n) adalah barisan **Lucas** jika

$$L_n = \begin{cases} a \text{ untuk } n=1 \\ b \text{ untuk } n=2 \\ L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Atau, a, b, b+a, 2b+a, 3b+2a, …

Jika (L_n) adalah barisan Lucas maka $L_n = bF_{n-1} + aF_{n-2}$ untuk setiap $n \geq 3$.

Bukti :

Misalkan (F_n) adalah barisan fibonacci.

Misalkan P(n) adalah $L_n = bF_{n-1} + aF_{n-2}$, untuk setiap $n \geq 3$

Untuk n = 3 maka $L_3 = bF_2 + aF_1 = b + a$

sehingga P(3) benar.

Diasumsikan untuk P(k) benar benar untuk setiap bilangan asli j sedemikian hingga $1 \leq j \leq k$, berarti $L_k = bF_{k-1} + aF_{k-2}$ untuk setiap k.

Untuk n = k + 1 maka P(k+1)

berarti, $L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$

$$= bF_{k-1} + aF_{k-2} + L_{k-1}$$

$$= bF_{k-1} + aF_{k-2} + bF_{k-2} + aF_{k-3}$$

$$= b(F_{k-1} + F_{k-2}) + a(F_{k-2} + F_{k-3})$$

$$= bF_k + aF_{k-1}$$

Sehingga P(k+1) benar

Menurut induksi matematika, P(n) benar untuk setiap $n \in N$, $n \geq 3$.

Jika digunakan induksi matematika biasa maka tidak dijamin kebenaran dari P(k-1) atau L_{k-1}, karena yang diasumsikan benar adalah P(k) atau L_k.

6.4 Latihan

1. Periksalah validitas dari argumen-argumen berikut:

   a. premis 1 : $r \Rightarrow \sim s$

   <u>premis 2 : $t \Rightarrow s$</u>

   konklusi : $r \Rightarrow \sim t$

   b. premis 1 : r

   premis 2 : $\sim t$

   <u>premis 3 : $r \wedge s \Rightarrow t$</u>

   konklusi : $\sim s$

   c. premis 1 : $r \Rightarrow \sim s$

   premis 2 : $\sim r \Rightarrow \sim t$

   premis 3 : $\sim t \Rightarrow u$

   <u>premis 4 : $v \Rightarrow s$</u>

   konklusi : $\sim v \vee u$

   d. premis 1 : $\sim r$

   <u>premis 2 : $(\sim r \wedge s) \Rightarrow r$</u>

   konklusi : $\sim s$

   e. premis 1 : $\sim t$

   <u>premis 2 : $(r \vee s) \Rightarrow t$</u>

   konklusi : $\sim s$

   f. premis 1 : $r \Rightarrow \sim s$

   premis 2 : $t \Rightarrow u$

   <u>premis 3 : $s \vee t$</u>

   konklusi : $r \vee u$

2. Buktikan :

   a. Terdapat bilangan bulat n sedemikian hingga $n^2 + 3n/2 = 1$. Apakah n merupakan bilangan bulat yang tunggal?

b. Terdapat bilangan rasional x sedemikian hingga $x^2 + 3x/2 = 1$. Apakah x merupakan bilangan rasional yang tunggal?

c. Untuk setiap bilangan real $x > 3$, terdapat bilangan real $y>0$ sedemikian hingga $x = \frac{3y}{2+y}$

3. Buktikan dengan kontradiksi:
   a. Jika x rasional dan y tidak rasional, maka x+y tidak rasional.
   b. Tidak ada bilangan prima terbesar.
   c. Jika π irasional maka 5π irasional.
   d. ${}^2\text{Log}\ 5$ adalah irasional.
4. Buktikan:
   a. Jika x bilangan real, maka $|x-2| \leq 3$ mengimplikasikan $-1 \leq x \leq 5$
   b. Jika $x^2 + x - 6 \geq 0$ maka $x \leq -3$ atau $x \geq 2$.
   c. Jika $x/(x-1) \leq 2$ maka $x \geq 2$ atau $x < 1$.
5. Periksa kebenaran setiap pernyataan berikut, jika benar buktikan, dan jika salah berikan contoh penyangkalnya!
   a. Tidak ada tiga bilangan bulat genap sedemikian hingga $a^2+b^2=c^2$.
   b. Tidak ada tiga bilangan bulat ganjil sedemikian hingga $a^2+b^2=c^2$.
   c. Untuk setiap bilangan bulat positip n, $n^2 + 3n + 8$ genap.
   d. Untuk setiap bilangan bulat positip n, $n^2 + 4n + 8$ genap.
   e. Jumlah dari dua bilangan irasional adalah irasional
6. Jika x dan y irasional maka x^y adalah rasional atau x^y adalah irasional
7. Ada bilangan irasional x dan y sedemikian hingga x^y irasional.
8. Buktikan dengan induksi matematika:
   a. $7^n - 1$ habis dibagi 6, untuk setiap $n \in N$
   b. $11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk setiap $n \in N$
   c. $6.7^n - 2.3^n$ habis dibagi 4, untuk setiap $n \in N$
   d. $3^n + 7^n - 2$ habis dibagi 8, untuk setiap $n \in N$

e. $5^{2n} - 1$ habis dibagi 8, untuk setiap $n \in N$

f. $9^n - 4^n$ habis dibagi 5, untuk setiap $n \in N$

g. $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk setiap $n \in N$

h. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ habis dibagi 9, untuk setiap $n \in N$

i. $a^n - b^n$ habis dibagi $a - b$, untuk setiap $n \in N$, kemudian buktikan bahwa $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ habis dibagi oleh 17 (petunjuk 17 = 25 – 8. Carilah bentuk $25^n - 8^n$ dalam bilangan yang harus dibagi).

9. Buktikan dengan induksi matematika

a. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, untuk setiap $n \in N$

b. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$, untuk setiap $n \in N$

c. $1x2 + 2x3 + \ldots n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$, untuk setiap $n \in N$

d. $1x2x3 + 2x3x4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$, untuk setiap $n \in N$

e. $-(1^2) + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n n(n+1)/2$, untuk setiap $n \in N$

f. $(1 - ½) (1 - 1/3) \ldots (1 - 1/(n+1)) = 1/(n+1)$, untuk setiap $n \in N$

10. Buktikan dengan induksi matematika

a. $(1+h)^n > 1 + nh$, untuk setiap $n \in N$, $n>1$ dan $h>0$

b. $2^n > n^2$, untuk setiap $n \in N$ dan $n > 4$.

c. $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$, untuk setiap $n \in N$ dan $n>1$

Bab VII

DEFINISI DAN TERMINOLOGI HIMPUNAN

7.1 Himpunan dan Anggota

Sudah tidak diragukan lagi bahwa konsep himpunan merupakan dasar dari matematika secara umum. Hampir seluruh cabang matematika modern sangat memerlukan teori himpunan, sehingga tak ada salahnya jika dalam bab ini dikemukakan beberapa atau sekelumit dari konsep himpunan.

Secara intuisi himpunan dapat diartikan sebagai kumpulan obyek yang didefinisikan dengan jelas atau baik. Obyek dalam himpunan dinamakan anggota atau elemen dari himpunan. Sinonim dari himpunan adalah kelas, kumpulan, koleksi, agregasi, dan gugus. Himpunan dapat dinyatakan dengan menggunakan huruf kapital, A, B, C, …, sedangkan anggota suatu himpunan dinyatakan dengan huruf kecil a, b, c, ….

Jika a anggota himpunan B maka ditulis $a \in B$. Jika d bukan anggota B maka ditulis $d \notin B$. Karena himpunan didefinisikan dengan baik maka dapat dengan tegas ditentukan apakah suatu obyek tertentu menjadi anggota dari suatu himpunan atau bukan.

Suatu himpunan dapat di definisikan dengan cara mendaftar semua anggotanya. Jika semua anggotanya tidak memungkinkan untuk didaftar maka dapat dengan mendeskripsikan sifat-sifat yang dimiliki anggotanya.

Contoh-contoh :

1. $A = \{ 1, 2, 5, 7 \}$, berarti A adalah himpunan yang memiliki anggota 1, 2, 5, dan 7.
2. $B = \{ x \,/\, x$ adalah bilangan prima dan $x < 10 \}$

7.2 Himpunan Semesta dan Himpunan Kosong

Setiap himpunan merupakan subset dari himpunan tertentu yang disebut himpunan semesta atau universal. Himpunan universal atau himpunan semesta dapat dinyatakan dengan S atau U. Sedangkan himpunan yang tidak memiliki anggota dinamakan himpunan kosong. Himpunan kosong sering dinyatakan dengan $\varnothing$.

Contoh-contoh :

1. A = {honda supra, honda astrea, honda super cup}, B = {suzuki cristal, suzuki sogun, suzuki satria, suzuki tornado} masing-masing himpunan memiliki semesta

   S = {semua kendaraan roda dua}.

2. $B = \{ x \in R \,/\, x^2 + 1 = 0 \}$ maka B merupakan himpunan kosong.

7.3 Subset (himpunan bagian)

Jika setiap elemen A menjadi anggota B maka A disebut subset dari B. A subset dari B dapat dinyatakan dengan "$A \subset B$" atau "$B \supset A$" yang masing-masing berarti "A dimuat B" dan "B memuat A". Secara simbolik

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Jika terdapat $p \in A$ dan $p \notin B$ maka A bukan subset B. Selanjutnya A bukan subset B dapat dinyatakan dengan $A \not\subset B$.

Jika A dimuat dalam B dan B dimuat dalam A maka A sama dengan B. Selanjutnya dapat ditulis A = B. Dengan kata lain A dan B dikatakan sama jika memiliki anggota tepat sama. Secara simbolik $A=B \Leftrightarrow A \subset B$ dan $B \subset A$. Jika ada $x \in A$ tetapi $x \notin B$ atau $x \in B$ tetapi $x \notin A$ maka $A \neq B$.

Jika $A \subset B$ dan $A \neq B$ maka dikatakan A subset sejati dari B.

Contoh:

1. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$ maka $A \subset B$, karena $1 \in A$ dan $1 \in B$, $2 \in A$ dan $2 \in B$ begitu juga $3 \in A$ dan $3 \in B$. Jadi setiap $x \in A$ maka $x \in B$. Tetapi $A \not\subset C$, karena $1 \in A$ dan $1 \notin B$. Begitu juga $C \not\subset B$, karena $4 \in C$ tetapi $4 \notin B$.
2. Misalkan $A = \{ 3 \}$ dan $B = \{ x / 2x = 6\}$ maka $A = B$

Teorema 7.3.1 : Misalkan A, B dan C adalah himpunan dan S himpunan semesta maka berlaku:

(i) $A \subset A$

(ii) Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$ maka $A \subset C$.

(iii) $\varnothing \subset A \subset S$.

Bukti :

(i) Ambil sebarang $x \in A$ jelas bahwa $x \in A$ juga, sehingga $A \subset A$.

(ii) Ambil sebarang $x \in A$, karena $A \subset B$ maka $x \in B$ juga. Tetapi $B \subset C$, sehingga $x \in C$. Untuk sebarang $x \in A$ maka $x \in C$, jadi $A \subset C$.

(iii) $\varnothing \subset A \subset S$.

Bukti sebagai latihan.

7.4 Himpunan Terhingga dan Tak hingga

Suatu himpunan dikatakan terhingga (finete) jika himpunan kosong atau memuat tepat n elemen dengan n bilangan asli, jika tidak demikian dikatakan himpunan tak hingga (infinete).

Contoh :

1. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ adalah himpunan terhingga
2. $H = \{ h / h$ adalah nama hari dalam seminggu$\}$ adalah himpunan terhingga
3. $N = \{1, 2, 3, \ldots. \}$ adalah himpunan tak hingga

4. P = { p/ p adalah pasir di pantai popoh} adalah himpunan terhingga
5. M = { m/ m adalah manusia yang pernah hidup di bumi} maka M merupakan himpunan terhingga.

7.5 Keluarga Himpunan

Kadang-kadang dijumpai bahwa anggota dari suatu himpunan adalah himpunan. Himpunan yang memiliki anggota suatu himpunan dinamakan keluarga himpunan atau kelas himpunan.

Partisi himpunan S adalah subset yang tak kosong dari S yang saling lepas dan gabungannya sama dengan S.

Contoh-contoh :

1. {{1}, {2,1}, {3,7}} adalah himpunan yang memiliki anggota {1}, {2,1}, dan {3,7}
2. {1}, {2,1}, dan {3,7} bukan merupakan partisi dari {1, 2, 3, 7} karena {1} dan {2, 1} tidak saling lepas. Sedangkan {1}, {2}, dan {3,7} merupakan partisi dari {1, 2, 3, 7} sebab gabungan ketiganya sama dengan {1, 2, 3, 7}.

7.6 Himpunan Kuasa (Power of set)

Himpunan kuasa A adalah himpunan yang anggotanya semua subset A. himpunan kuasa A dinyatakan dengan 2^A atau *P*(A). Secara simbolik $2^A = \{ G_i / G_i \subset A \}$.

Contoh-contoh:

1. Jika A = {1, 2} maka $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
2. Jika B = {1, 2, 3} maka $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{2, 3\}, B\}$

7.7 Kardinalitas Himpunan

Misalkan A sebarang himpunan dan misalkan a menyatakan keluarga himpunan yang dapat dipasangkan satu-satu dengan A, maka a dinamakan kardinalitas dari A. Secara simbolik kardinalitas A dinyatakan sebagai “ #(A)”. Jika A himpunan terhingga maka kardinalitas dari A dapat diartikan sebagai banyaknya anggota himpunan A.

Jelas bahwa kardinalitas dari setiap himpunan $\emptyset$, {1}, {1, 2}, {1, 2, 3 }, … berturut-turut dinyatakan oleh 0, 1, 2, 3, …

Contoh-contoh :

1) Jika A = {a, b, c} maka #(A) = 3
2) Jika B = {1, 2, 5, 6, 10, 23} maka #(B) = 6
3) Jika #(A) = n maka $\#(2^A) = 2^n$.

7.8 Himpunan Bilangan

Seringnya pemakaian bilangan pada semua cabang matematika maka perlu disepakati tentang pemakaia simbol dari beberapa himpunan bilangan.

P menyatakan himpunan semua bilangan prima positip

N menyatakan himpunan semua bilangan bulat positip atau himpunan semua bilangan asli (natural numbers).

B menyatakan himpunan semua bilangan bulat.

Q menyatakan himpunan semua bilangan rasional.

Q’ menyatakan himpunan semua bilangan irasional.

R menyatakan himpunan semua bilangan real.

C menyatakan himpunan semua bilangan komplek.

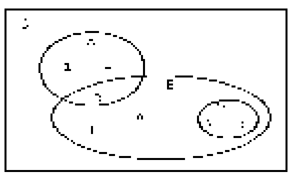
7.9 Diagram Venn dan Euler

Untuk menghilangkan kejenuhan serta memudahkan penangkapan terhadap himpunan maka diperlukan adanya interprestasi terhadap himpunan.

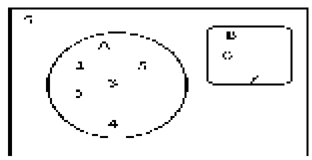
Himpunan dapat diinterprestasi-kan secara geometris dengan menggunakan kurva tertutup sederhana, sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan noktah. Cara ini mula-mula dikenalkan oleh John Venn, sehingga dinamakan diagram Venn.

Contoh-contoh :

1. A = {1, 2, 3 } dan B = { 3, 4, 8, 9, 10} dan C = {9, 10} diagram venn-nya ditunjukkan oleh gambar 1a.
2. Jika A = {1, 2, …, 5} dan B = {6, 7} maka diagram venn-nya ditunjukkan oleh gambar 1b



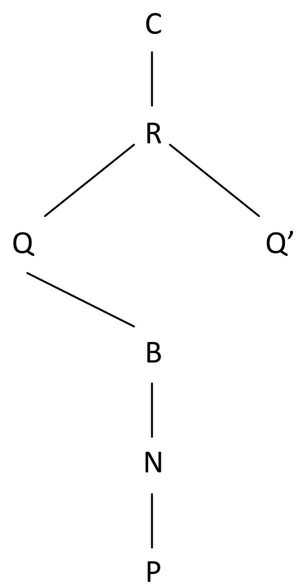
Gambar 1a



Gambar 1b

Euler mengenalkan gambar himpunan dengan memberikan garis hubung antara himpunan yang satu dengan yang lain, sedemikian hingga himpunan yang memuat himpunan yang lebih kecil ditematkan di atas. Diagram Euler ini sering disebut diagram garis.

Contoh: Gambarkan himpunan semua bilangan P, N, B, Q, Q’, R, dan C



Terlihat bahwa Q dan Q’ sejajar sebab dua himpunan tersebut tidak dapat diperbandingkan.

7.10 Latihan

1. Berikan beberapa contoh himpunan!
2. Periksalah kumpulan berikut dapat merupakan himpunan atau bukan himpunan!
   a. Kumpulan bilangan-bilangan yang memiliki tepat dua faktor.
   b. Kumpulan bilangan-bilangan besar.
   c. Kumpulan bilangan-bilangan yang lebih besar dari satu milyar
   d. Kumpulan ibu-ibu anggota arisan RT 01 desa Mojoroto Kediri.
   e. Kumpulan mahasiswa cantik di Universitas Empu Baradha Kediri.
   f. Kumpulan segitiga samakaki.
3. Berikan contoh dua himpunan kosong
4. $A = \{ x / x \neq x\}$ apakah A himpunan kosong?
5. Buktikan bahwa himpunan kosong adalah tunggal.

6. Apakah himpunan semesta juga tunggal? Jika ya, buktikan dan jika tidak berikan contoh penyangkalnya!
7. Misalkan A = { 4 } dan 2a = 8, apakah A = a?
8. Misalkan B = {a, b, c} jelaskan apakah setiap pernyataan berikut benar.
   a. $a \in B$
   b. $a \subset B$
   c. $\{b\} \in B$
   d. $\{b\} \subset B$
   e. $B \in B$
   f. $B \subset B$
9. A suatu himpunan sebarang. Apakah A selalu memiliki subset sejati? Jika ya, buktikan jika salah berikan contoh penyangkalnya.
10. Periksalah himpunan berikut termasuk himpunan terhingga atau tak terhingga, atau tidak keduanya!
    a. himpunan bilangan kelipatan 3
    b. himpunan binatang yang ada di bumi
    c. himpunan titik-titik pada garis y = x
    d. himpunan garis-garis yang sejajar dengan sumbu x.
    e. himpunan huruf-huruf dalam alpabet.
    f. Himpunan semua lingkaran yang melalui titik (2,1)
    g. Himpunan akar-akar persamaan $x^{100} + 23\,x^{99} - 13x = 0$
11. Misalkan S merupakan himpunan semesta. Manakah pernyataan berrikut yang benar?
    a. $S \in 2^S$
    b. $S \subset 2^S$
    c. $\{S\} \in 2^S$
    d. $\{S\} \subset 2^S$
12. Misalkan A = { a, {a,b}, b}} tentukan 2^A.

13. Apakah {{ }} = { }? Jelaskan!
14. Gambarlah diagram Venn dari himpunan bilangan pada subbab H halaman 84.
15. Apakah {1,2,3,4} = {2,4,3,1} = {1,2,3,2,4,2}? Jelaskan!

Bab VIII

OPERASI HIMPUNAN

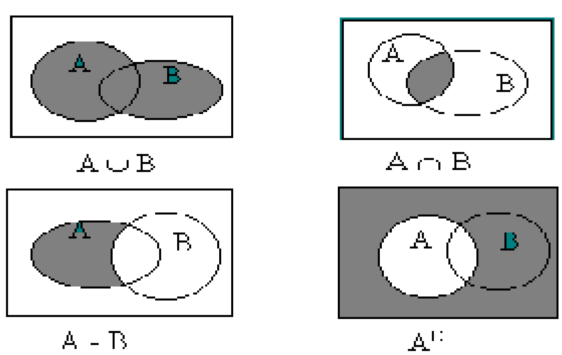
8.1 Operasi Himpunan

Seperti pada himpunan bilangan telah dikenal operasi penjumlahan, perkalian, pengurangan dan pembagian. Pada himpunan juga dikenal beberapa operasi, yaitu suatu aturan untuk mendapatkan sebuah himpunan tunggal dari beberapa himpunan yang diketahui. Operasi biner pada himpunan antara lain, gabungan, irisan dan selisih. Operasi uner yaitu komplemen.

8.1.1 Gabungan

Definisi: Misalkan A dan B sebarang himpunan. Gabungan A dan B dinyatakan dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang memiliki anggota A atau anggota B. Secara simbolik dapat ditulis sebagai $A \cup B = \{ x / x \in A \text{ atau } x \in B \}$

Gambar 8.1: Gabungan, irisan, selisih dua himpunan serta komplemen himpunan.



Dari definisi gabungan di atas dapat diperoleh sifat: Bahwa jika A dan B sebarang himpunan maka $A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$

Contoh:

1) Misalkan A= { 1, 2, 3, 4}, B = { 2, 4, 6, 8}, dan C = {3, 4, 5, 6, 7}.

   Carilah (a) $A \cup B$, (b) $A \cup C$, (c) $B \cup C$, (d) $B \cup B$.

   Penyelesaian.

   Untuk membentuk gabungan A dan B maka kita padukan semua elemen dari A bersama–sama dengan semua elemen dari B. Dengan demikian, $A \cup B$ = { 1, 2, 3, 4, 6, 8}

   Begitu pula, $A \cup C$ = { 1,2,3,4,5,6,7}

   $B \cup C$ = { 2, 4, 6, 8, 3, 5, 7}

   $B \cup B$ = { 2, 4, 6, 8 }

   Perhatikan bahwa $B \cup B$ sama dengan B

2) misalkan A, B dan C adalah himpunan–himpunan dalam Soal 1. Carilah (i) $(A \cup B) \cup C$, (ii) $A \cup (B \cup C)$.

   Penyelesaian :

   (i) Pertama kita mendapat $(A \cup B)$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8).

   Maka gabungan dari $(A \cup B)$ dan C adalah:

   $(A \cup B) \cup C$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 5, 7}

   (ii) Pertama kita mendapat $(B \cup C)$ = {2, 4, 6, 8, 3, 5, 7}.

   Maka gabungan dari A dan $(B \cup C)$ adalah :

   $A \cup (B \cup C)$ = { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 5, 7}

   perhatikan bahwa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

3) Misalkan $X = \{ \text{Tom, Dick, Harry} \}$, $Y = \{\text{Tom, Marc, Eric}\}$ dan $Z = \{ \text{Marc, Eric, Edward})$. Carilah (a) $X \cup Y$, (b) $Y \cup Z$, (c) $X \cup Z$

   Penyelesaian :

   Untuk mendapatkan $X \cup Y$ didaftarkan semua nama–nama dari X dengan nama–nama dari Y;

   Jadi $X \cup Y = \{ \text{Tom, Dick, Harry, Marc, Eric} \}$

   Begitu pula, $Y \cup Z = \{\text{Tom, Marc, Eric, Edward} \}$

   $X \cup Z = \{ \text{Tom, Dick, Harry, Marc, Eric, Edward}\}$

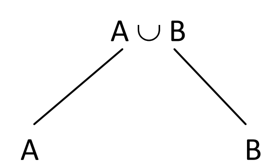
4) Misalkan A dan B adalah dua buah himpunan yang tidak dapat diperbandingkan. Gambarkan diagram garis untuk himpunan– himpunan A, B dan $A \cup B$.

   Penyelesaian :

   Pertama perhatikan, bahwa menurut sifat gabungan maka A dan B kedua–duanya adalah subset dari $A \cup B$, yaitu :

   $$A \subset (A \cup B) \text{ dan } B \subset (A \cup B)$$

   Dengan demikian, diagram–garis dari A, B dan A U B adalah



5) Buktikan sifat bahwa: A dan B adalah subset dari $A \cup B$.

   Penyelesaian :

   Karena $A \cup B = B \cup A$ kita hanya perlu memperlihatkan bahwa A adalah subset dari

   $A \cup B$, yaitu bila $x \in A$ maka $x \in A \cup B$.

   Misalkan x suatu anggota dari A maka sebagai akibatnya x adalah anggota dari A atau B, yang berarti $x \in A \cup B$.

   Jadi $A \subset (A \cup B)$.

6) Buktikan : A = A U A

Penyelesaian :

Menurut definisi kesamaan dua himpunan kita hanya perlu memperhatikan bahwa $A \subset (A \cup A)$ dan $(A \cup A) \subset A$. Menurut soal 5, $A \subset (A \cup A)$. Sekarang misalkan $x \in (A \cup A)$. Maka menurut definisi gabungan, $x \in A$ atau $x \in A$; jadi x termasuk dalam A. Dengan demikian, $(A \cup A) \subset A$ dan menurut definisi kesamaan, $A = (A \cup A)$.

7) Buktikan : $S \cup A = S$, dimana S adalah himpunan semesta.

   Penyelesaian :

   Menurut sifat gabungan, $S \subset (S \cup A)$. Karena setiap himpunan adalah subset dari himpunan semesta, berarti $(S \cup A) \subset S$ dan kesimpulannya diperoleh dari definisi kesamaan. Jadi $(S \cup A) = S$

8) Buktikan : $\varnothing \cup A = A$

   Penyelesaian:

   Menurut sifat gabungan, $A \subset (A \cup \varnothing)$.

   Sekarang misalkan $x \in (A \cup \varnothing)$; maka $x \in A$ atau $x \in \varnothing$.

   Menurut definisi himpunan kosong $x \notin \varnothing$.

   Jadi dengan demikian $x \in A$. Kita telah memperlihatkan bahwa bila $x \in (A \cup \varnothing)$ maka

   $x \in A$, artinya $(A \cup \varnothing) \subset A$.

   Menurut definisi kesamaan, $A = \varnothing \cup A$.

9) Buktikan: $A \cup B = \varnothing$ maka $A = \varnothing$ dan $B = \varnothing$.

   Penyelesaian :

   Sifat gabungan, $A \subset (A \cup B)$, yaitu $A \subset \varnothing$, tetapi $\varnothing$ adalah subset dari sembarang himpunan, dan khusunya $\varnothing \subset A$, Jadi dengan demikian menurut definisi kesamaan, $A = \varnothing$.

   Dengan cara yang sama kita dapat diperlihatkan bahwa $B = \varnothing$.

8.1.2 Irisan

Definisi: Irisan A dan B dinyatakan dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang memiliki anggota A dan anggota B. Secara simbolik dapat ditulis sebagai $A \cap B = \{ x / x \in A \text{ dan } x \in B \}$

Jika $A \cap B = \phi$ maka A dan B tidak memiliki elemen sekutu, dikatakan A dan B disjoin atau saling lepas.

Dari definisi irisan di atas dapat diperoleh sifat: Bahwa jika A dan B sebarang himpunan maka $A \cap B \subset A$ dan $A \cap B \subset B$.

Contoh:

1) misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Carilah (a) $A \cap B$, (b) $A \cap C$, (c) $B \cap C$, (d) $B \cap B$.

   Penyelesaian :

   Untuk membentuk irisan A dan B kita mendaftarkan semua elemen yang dimiliki bersama oleh A dan B; jadi $A \cap B = \{ 2, 4\}$. Dengan cara yang sama, $A \cap C = \{ 3, 4\}$, $B \cap C = \{ 4, 6\}$ dan

   $B \cap B = \{ 2, 4, 6, 8\}$.

   Perhatikan bahwa $B \cap B$ sebenarnya B.

2) Misalkan A, B dan C adalah himpunan di dalam Soal 1.

   Carilah (a) $(A \cap B) \cap C$ (b) $A \cap (B \cap C)$.

   Penyelesaian :

   (a) $A \cap B = \{2, 4 \}$. Maka irisan $\{ 2,4 \}$ dan C adalah $(A \cap B) \cap C = \{4\}$

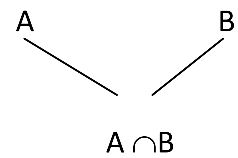
   (b) $B \cap C = \{4, 6\}$. Maka irisan ini dan A adalah $\{4\}$, yaitu, $A \cap (B \cap C) = \{4\}$.

   Perhatikan bahwa : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3) Misalkan A dan B adalah dua buah himpunan yang tidak dapat diperbandingkan. Susunlah diagram–garis untuk A, B, dan $A \cap B$.

   Penyelesaian:

Menurut sifat irisan $A \cap B$ adalah subset dari A dan B kedua– duanya, yaitu, $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$. Oleh sebab itu diperoleh diagram–garis berikut.



4) Buktikan sifat irisan bahwa: $(A \cap B)$ adalah subset dari A dan B.

   Penyelesaian :

   Misalkan x sebarang elemen dalam $A \cap B$.

   Menurut definisi irisan x termasuk dalam A dan B kedua–duanya, khususnya $x \in A$. Telah diperlihatkan bahwa bila $x \in A \cap B$ maka $x \in A$, yang berarti $(A \cap B) \subset A$.

   Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa, $(A \cap B) \subset B$.

5) Buktikan : $A \cap A = A$

   Penyelesaian:

   Menurut sifat irisan, $(A \cap A) \subset A$. Misalkan x sebarang elemen dalam A; maka jelas bahwa x masuk A dan A yang berarti x termasuk dalam $A \cap A$. Telah dibuktikan bahwa bila $x \in A$ maka $x \in (A \cap A)$. Menurut definisi kesamaan, $A \cap A = A$

6) Buktikan : $S \cap A = A$, dengan S adalah himpunan semesta.

   Penyelesaian:

   Menurut sifat irisan, $(S \cap A) \subset A$. Misalkan x sebarang unsur di dalam A. Karena S adalah himpunan semesta maka x termasuk dalam S. Karena $x \in A$ dan $x \in S$, maka menurut definisi irisan $x \in (S \cap A)$. Telah diperlihatkan bahwa bila $x \in A$ maka $x \in (S \cap A)$ yang berarti kita telah buktikan bahwa $A \subset (S \cap A)$.

   menurut definisi kesamaan $(S \cap A) = A$.

7) Buktikan $A \cap \varnothing = \varnothing$

Penyelesaian :

Menurut sifat irisan, $(A \cap \varnothing) \subset \varnothing$. Tetapi himpunan kosong adalah subset dari sebarang himpunan, khususnya $\varnothing \subset (A \cap \varnothing)$. Dengan demikian $A \cap \varnothing = \varnothing$.

8.1.3 Selisih

Selisih A dan B dinyatakan dengan A \ B atau A – B adalah himpunan yang memiliki anggota A dan bukan anggota B. Secara simbolik dapat ditulis sebagai $A - B = \{ x / x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

Dari definisi selisih di atas dapat diperoleh sifat: Bahwa jika A dan B sebarang himpunan maka $A\text{-}B \subset A$.

Contoh:

1) Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, B = { 2, 4, 6, 8}, C = { 3, 4, 5, 6}.

   Carilah (a) (A– B), (c) (C–A), (c) (B – C), (d) (B – A), (e) (B – B).

   Penyelesaian;

   (a) Himpunan A – B terdiri atas elemen–elemen dalam A yang tidak berada dalam B, karena A = {1, 2, 3, 4} dan $2,4 \in B$, maka A – B = { 1,3}.

   (b) Elemen-elemen dalam C yang tidak berada dalam A adalah 5 dan 6, dengan demikian C – A = {5, 6 } begitu juga,

   (c) B – C = { 2, 8}

   (d) B – A = { 6, 8 }

   (e) $B - B = \varnothing$

2) Buktikan sifat selisih himpunan: $(A- B) \subset A$

   Penyelesaian :

   Misalkan x sebarang elemen dari himpunan A – B. Menurut definisi selisih himpunan maka $x \in A$ dan $x \notin B$, khususnya x termasuk dalam A. Telah ditunjukkan bahwa bila $x \in (A - B)$ maka $x \in A$, dengan pekataan lain, $(A-B) \subset A$

3) Buktikan : $(A - B) \cap B = \varnothing$.

   Penyelesaian:

   Misalkan x termasuk dalam $(A - B) \cap B$. Menurut definisi irisan, $x \in A-B$ dan $x \in B$. Tetapi menurut definisi selisih himpunan, $x \in A$ dan $x \notin B$. Karena tidak ada elemen yang memenuhi $x \in B$ dan $x \notin B$, kedua–duanya maka dengan demikian $(A - B) \cap B = \varnothing$.

8.1.4 Komplemen

Komplemen dari himpunan A dinyatakan dengan A^c adalah himpunan yang memiliki anggota S tetapi bukan anggota A. Secara simbolik dapat ditulis sebagai $A^c = \{ x / x \in S \text{ dan } x \notin A\}$.

Contoh-contoh:

1) Misalkan S = { 1, 2, 3, …, 8, 9}, A = { 1, 2, 3, 4 }, B = {2, 4, 6, 8} dan C = { 3, 4, 5, 6 }.

   Carilah (a) A’, (b) B’, (c) $(A \cap C)'$, (d) $(A \cap B)'$, (e) $(A')'$, (f) $(B - C)'$.

   Penyelesaian:

   (a) Himpunan A’ terdiri atas elemen – elemen yang terdapat dalam S tetapi tidak dalam A. Oleh karena itu A’ = { 5,6,7,8,9 }.
   (b) himpunan yang terdiri atas elemen – eleman yang terdapat dalam S tidak dalam B adalah B’ = { 1,3,5,7,9 }.
   (c) $(A \cap C) = \{ 3,4 \}$ dan oleh karena itu $(A \cap C)' = \{ 1,2,5,6,7,8,9 \}$.
   (d) $(A \cup B) = \{ 1,2,3,4,6,8 \}$ dan oleh karena itu $(A \cup B)' = \{ 5,7,9 \}$
   (e) $A' = \{ 5,6,7,8,9\}$ dan oleh karena itu $(A')' = \{ 1,2,3,4 \}$ yang berarti $(A')' = A$
   (f) $(B - C) = \{ 2,8 \}$ dan oleh karena itu $(B - C)' = \{ 1,3,4,5,6,7,9 \}$

2) Buktikan Teorima De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

   Penyelesaian:

   Misalkan $x \in (A \cup B)'$; maka x tidak termasuk $A \cup B$.

   Dengan demikian $x \notin A$ dan $x \notin B$, yang berarti $x \in A'$ dan $x \in B'$, dan menurut definisi irisan, x termasuk $A' \cap B'$.

   Telah ditunjukkan bahwa jika $x \in (A \cup B)'$ maka $x \in (A' \cap B')$ yang berarti $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$.

   Sekarang misalkan $y \in A' \cap B'$; maka y termasuk A' dan y termasuk B'. Jadi y $\notin$ A dan $y \notin B$ dan oleh karena itu $y \in (A \cup B)$`, yang berarti $y \in (A \cup B)'$. Telah ditunjukkan bahwa jika $y \in (A' \cap B')$ maka $y \in (A \cup B)'$, yang berarti $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$

   Oleh karena itu, menurut Definisi kesamaan $(A' \cap B') = (A \cup B)'$.

3) Misalkan S = { a,b,c,d,e }, A = { a,b,d} dan B = { b,d,e }. Carilah (a) $A \cup B$, (b) $B \cap A$, (c) B', (d) B- A, (e) $A' \cap B$, (f) $A \cup B'$, (g) $A' \cap B'$, (h) $B' - A'$, (I) $(A \cap B)'$, (j) $(A \cup B)'$.

   Penyelesaian:

   (a) Gabungan dari A dan B terdiri atas elemen – elemen dalam A dan elemen–elemen dalam B, yang berarti $A \cup B$ = { a,b,d,e }.
   (b) Irisan A dan B terdiri atas elemen–elemen yang dimiliki bersama A dan B, yang berarti $A \cap B$ = { b,d }
   (c) Komplemen dari B terdiri atas huruf–huruf yang terdapat dalam S tetapi tidak dalam B; jadi B' = { a,c }
   (d) Himpunan B – A terdiri atas elemen–elemen dalam B tetapi tidak dalam A, yang berarti B – A = {e}.
   (e) A' = { c,e} dan B = { b,d,e }; maka $A' \cap B$ = {e}
   (f) A = { a,b,d } dan B' = { a,c}; maka $A \cup B'$ = { a,b,c,d }

(g) $A' = \{ c,e\}$ dan $B' = \{a,c\}$; maka $A' \cap B' = \{ c\}$

(h) $B' - A' = \{a\}$

(i) Dari (b}, $A \cap B = \{ b,d \}$; oleh karena itu $(A \cap B)' = \{a,c,e \}$

(j) Dari (a), $A \cup B = \{ a,b,d,e \}$; oleh karena itu $(A \cup B)' = \{e\}$.

4) Buktikan : $B - A$ adalah subset dari A'.

Penyelesaian:

Misalkan x anggota $B - A$. Maka $x \in B$ dan $x \notin A$; oleh karena itu x adalah anggota dari A'. Karena bila $x \in B - A$ maka $x \in A'$, ini berarti $B - A$ adalah subset dari A'.

5) Buktikan : $B - A' = B \cap A$

Penyelesaian:

$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\} = \{x \mid x \in B, x \in A'\} = B \cap A$.

8.2 Beberapa Teorema

Dari beberapa definisi operasi himpunan di atas dapat diturunkan beberapa teorema sebagai berikut:

Teorema 8.2.1: Misalkan A, B dan C adalah himpunan maka berlaku:

No	**Gabungan**	**No**	**Irisan**
1a	$A \cup A = A$	1b	$A \cap A = A$
2a	$A \cup B = B \cup A$	2b	$A \cap B = B \cap A$
3a	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	3b	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4a	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5a	$A \cup \varnothing = A$	5b	$A \cap S = A$
6a	$A \cup S = S$	6b	$A \cap \varnothing = \varnothing$
7a	$A \cup A^C = S$	7b	$A \cap A^C = \varnothing$
8a	$(A^c)^c = A$	8b	$S^c = \varnothing$; $\varnothing^c = S$
9a	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	9b	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Teorema 8.2.2 : Jika $A \subset B$ maka

(i) $A \cap B = A$

(ii) $A \cup B = B$

(iii) $B^c \subset A^c$

(iv) $A \cap B^c = \varnothing$

(v) $B \cup A^c = S$

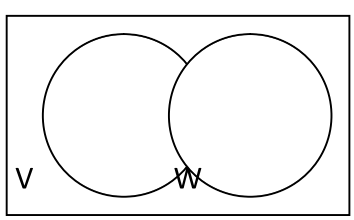
8.3 Latihan

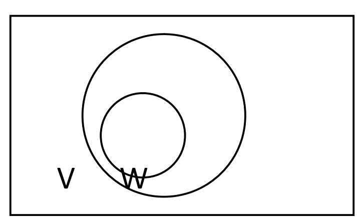
1. Misalkan himpunan semesta $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$dan misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B= \{a, c, e, g\}$ dan $C = \{b, e, f, g\}$. Carilah:

   1) $A \cup C$
   2) $C - B$
   3) $A' - B$
   4) $(A - C)'$
   5) $(A - B')'$
   6) $B \cap A$
   7) B'
   8) $B' \cup C$
   9) $B' \cap A$
   10) $(A' \cap A)'$

2. Buktikan: Jika $A \cap B = \varnothing$, maka $A \subset B'$

3. Berikan arsiran pada gambar diagram–diagram Venn dibawah ini, untuk (1) $V \cap W$, (2) W', (3) $W-V$, (4) $V' \cup W$, (5)$(V \cap W')$, (6) $V' - W'$





4. Gambarkan suatu digaram Venn untuk ketiga himpunan tak kosong A, B, dan C akan memililki sifat – sifat berikut:
   1) $A \subset B$, $C \subset B$, $A \cap C = \varnothing$
   2) $A \subset B$, $C \not\subset B$, $A \cap C \neq \varnothing$
   3) $A \subset C, A \neq C$, $B \cap C = \varnothing$
   4) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, $C \neq B$, $A \neq C$
5. Tentukan:
   1) $U \cap A$
   2) $A \cup A$.
   3) $\varnothing'$.
   4) $\varnothing \cup A$
   5) $A' \cap A$.
   6) U'
   7) $U \cap A$.
   8) $A' \cup A$
   9) $A \cap A$
   10) $\varnothing \cup A$
6. Lengkapilah pernyataan – pernyataan berikut dengan menyisipkan , $\subset$, $\supset$ atau ☹ (tidak dapat diperbandingkan) antara setiap pasangan himpunan. Disini A dan B adalah sebarang himpunan – himpunan.
   1) A…A – B.
   2) A…$A \cap B$
   3) A' ……B – A.
   4) A…..$A \cup B$
   5) A'…..A – B
   6) A…..B-A

7. Rumus $A - B = A \cap B'$ dapat didefinisikan selisih dari dua himpunan dengan hanya mempergunakan operasi–operasi irisan dan komplemen. Carilah suatu rumus yang dapat mendefinisikan gabungan dari dua buah himpunan, $A \cup B$ dengan hanya mempergunakan operasi – operasi irisan dan komplemen.
8. Buktikan : $A - B$ adalah subset dari $A \cup B$
9. Buktikan Teorema 8.2.2 Jika $A \subset B$ maka $A \cap B = A$
10. Buktikan : Misalkan $A \cap B = \emptyset$; maka $B \cap A' = B$
11. Buktikan Teorema 8.2.2: Jika $A \subset B$ maka $A \cup B = B$
12. Buktikan : $A' - B' = B - A$
13. Buktikan :Jika $A \subset B$ maka $B' \subset A'$
14. Buktikan : Misalkan $A \cap B = \emptyset$; maka $A \cup B' = B'$
15. Buktikan : $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
16. Buktikan: Jika $A \subset B$ maka $A \cup (B - A) = B$.
17. Tunjukkan bahwa, jika A dan B subset dari S maka $A \cap (S - B) = A - B$.

Bab IX
RELASI DAN FUNGSI

9.1 Pasangan Terurut

Dalam himpunan yang telah dibahas pada bab terdahulu, dinyatakan secara implisit bahwa urutan elemen dalam himpunan tidaklah penting. Sehingga himpunan {1, 2} akan sama dengan himpunan {2, 1}. Pada saat tertentu urutan sangat penting artinya, misalkan pada geometri analitik bidang koordinat titik (x,y) digambarkan sebagai pasangan terurut bilangan. Sehingga titik (1,2) berbeda dengan titik (2,1). Untuk membedakan elemen a dan b pada suatu himpunan merupakan pasangan terurut atau bukan maka suatu pasangan terurut dinyatakan dalam kurung tertutup (a,b). a menyatakan elemen pertama dan b menyatakan elemen kedua.

Pada subbab ini pasangan terurut didefinisikan dengan menggunakan himpunan.

Definisi 9.1.1: (a,b) = {{a},{a,b}}

Teorema 9.1.1: (a,b) = (c,d) jika dan hanya jika a=c dan b=d.

Teorema ini sering disebut sifat dasar pada suatu pasangan terurut.

Bukti:

(i) jika a=c dan b=d maka (a,b) = {{a}, {a,b}} = {{c}, {c,d}} = (c,d)

(ii) jika (a,b) = (c,d) maka menurut definisi {{a}, {a,b}} = {{c}, {c,d}}

Dari {{a}, {a,b}} = {{c}, {c,d}} akan dibuktikan bahwa a=c dan b=d.

Terdapat dua kasus,

Kasus pertama untuk a=b

Jika a=b maka {a} = {a,b} sehingga (a,b) = {{a}}.

Karena (a,b) = (c,d) maka {{a}} = {{c}, {c,d}}, jelas bahwa himpunan di ruas kiri memiliki satu anggota maka ruas kanan seharusnya juga memiliki satu anggota.

Jadi {c} = {c,d} akibatnya c=d.

Dan {{a}} = {{c}} maka {a} = {c}.

Sehingga a=c, akibatnya a=b=c=d.

Kasus kedua untuk a $\neq$ b

Karena (a,b) = (c,d) maka {a} $\in$ {{c},{c,d}}

Sehingga {a} = {c} atau {a} = {c,d}, akibatnya a=c

Karena (a,b) = (c,d) maka {a,b} $\in$ {{c},{c,d}}

Sehingga {a,b} = {c} atau {a,b} = {c,d}

Karena a$\neq$b dan {c} hanya memiliki sebuah elemen maka {a,b} = {c,d}

Demikian juga, a=c, a$\neq$b dan b $\in$ {c,d} akibatnya b=d.

Contoh

1) Jika A = {1, 2, 3} maka semua pasangan terurut (x,y) sedemikian hingga x $\in$ A dan y $\in$ A, adalah (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3).

9.2 Perkalian Himpunan

Misalkan A dan B himpunan. Perkalian himpunan A dan B dinyatakan dengan AxB adalah himpunan yang anggotanya pasangan terurut (a,b) dengan a $\in$ A dan b $\in$ B. Secara simbolik dapat ditulis sebagai

AxB = { (a,b) / a $\in$ A dan b $\in$ B }

Contoh:

1) A = {a, b} dan B = { 1, 2, 3} maka AxB = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) } sedangkan BxA = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}. Apakah AxB = BxA? Mengapa?
2) C = {1, 2} maka CxC = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)}
3) Jika R suatu bilangan real maka RxR = {(x,y)/ x,y $\in$ R). Secara geometris merupakan suatu bidang.
4) Jika A= { x/ a< x < b} dan B = {y/ c<y<d} maka AxB adalah daerah dalam persegi panjang dengan titik-titik sudut (a,c); (a,d); (b,d) dan (b,c).

9.3 Relasi

Definisi 9.3.1: Misalkan A dan B himpunan, suatu relasi R dari himpunan A dan B adalah subset dari AxB.

Jika R suatu relasi dari A ke B, maka dapat dinyatakan sebagai R:A$\rightarrow$B.

Misalkan: R: A$\rightarrow$B adalah {(a,1), (b,2), (c,1)} relasi R tersebut dapat dinyatakan dengan cara lain, yaitu:

a dan 1 berada dalam relasi R

b dan 2 berada dalam relasi R

c dan 1 berada dalam relasi R

atau

a berelasi dengan 1

b berelasi dengan 2

c berelasi dengan 1

atau

a R 1

b R 2

c R 1

tetapi c tidak berelasi dengan 2 atau c $\not R$ 2

Contoh-contoh:

1) A = {2, 3, 4} dan B = {c, d} maka

   R_1 = { (2,c), (2,d), (4,d)} merukapan relasi antara A dan B

   R_2 = {(2,2), (2,c)} bukan relasi antara A dan B.

2) Jika A = {a, b, c} maka R = {(a,a), (a,b), (b,c)} merupakan relasi pada A.

   Perhatikan himpunan S = {a, b, c, …} dan R suatu relasi pada S.

9.3.1 Relasi Refleksif

Relasi R disebut refleksif jika setiap anggota S berelasi dengan dirinya sendiri.

Relasi R disebut non-refleksif jika ada anggota S yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Relasi R disebut ir-refleksif jika setiap anggota S tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

9.3.2 Relasi Simetri

Relasi R disebut simetri jika setiap dua anggota a dan b dari S jika a berelasi b maka b berelasi dengan a.

Relasi R disebut non-simetri jika ada dua anggota a dan b dari S sedemikian hingga jika a berelasi b maka b tidak berelasi dengan a.

Relasi R disebut asimetri jika setiap dua anggota a dan b dari S jika a berelasi b maka b tidak berelasi dengan a.

Relasi R disebut anti-simetri jika setiap dua anggota a dan b dari S jika a berelasi b dan b berelasi dengan a maka a sama dengan b.

9.3.3 Relasi transitif

Relasi R disebut relasi transitif jika untuk setiap tiga anggota a, b dan c dari S jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a berelasi dengan c.

Relasi R disebut relasi non-transitif jika ada tiga anggota a, b dan c dari S sedemikian hingga jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a tidak berelasi dengan c.

Relasi R disebut relasi in-transitif jika untuk setiap tiga anggota a, b dan c dari S jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a tidak berelasi dengan c.

9.3.4 Relasi ekuivalen

Relasi R disebut relasi ekuivalen jika relasi R adalah refleksif, simetri dan transitif.

Contoh-contoh:

1) Relasi "mengenal" pada himpunan orang-orang merupakan relasi refleksif.
2) Relasi "mencintai" pada himpunan orang-orang adalah bukan relasi refleksif.
3) Relasi "sama dengan" pada himpunan bilangan bulat merupakan relasi refleksif.
4) Relasi R = {(1,1), (2,2), (5,5)} merupakan relasi refleksif pada himpunan S={1, 2, 5}
5) Relasi "membenci" pada himpunan orang-orang adalah non-refleksif.
6) Relasi "lebih besar dari atau sama dengan" pada himpunan bilangan asli orang adalah non-refleksif.
7) Relasi R = {(1,1), (2,5), (5,5)} merupakan relasi non refleksif pada himpunan
   S={1, 2, 5}

8) Relasi “ayah dari” pada himpunan orang-orang adalah ir-refleksif.
9) Relasi “lebih besar dari” pada himpunan bilangan asli orang adalah ir-refleksif.
10) Relasi R = {(1,2), (2,5), (5,1), (2,1)} merupakan relasi non refleksif pada himpunan S={1, 2, 5}
11) Relasi “sekampung” pada himpunan orang-orang adalah simetri.
12) Relasi “sebidang” pada himpunan titik dalam ruang adalah simetri.
13) Relasi R = {(1,2), (2,1), (2,5), (5,2), (5,5)} merupakan relasi simetri pada himpunan S = {1, 2, 5}
14) Relasi “mencintai” pada himpunan orang-orang bukan adalah non-simetri.
15) Relasi “lebih kecil dari atau sama dengan” pada himpunan bilangan real adalah non-simetri.
16) Relasi R = {(1,2), (2,5), (5,2), (5,5)} merupakan relasi non-simetri pada himpunan S = {1, 2, 5}
17) Relasi “ayah dari” pada himpunan orang-orang adalah asimetri.
18) Relasi “lebih kecil dari” pada himpunan bilangan asli orang adalah asimetri.
19) Relasi R = {(1,2), (2,5), (5,1)} merupakan relasi asimetri pada himpunan S={1, 2, 5}.
20) Relasi “lebih kecil dari atau sama dengan” pada himpunan bilangan asli orang adalah anti-simetri.
21) Relasi “sejajar dengan” pada himpunan garis-garis di bidang datar adalah transitif.
22) Relasi “mencintai” pada himpunan orang-orang adalah bukan relasi transitif.
23) Relasi “mengenal” pada himpunan orang-orang adalah non-transitif.

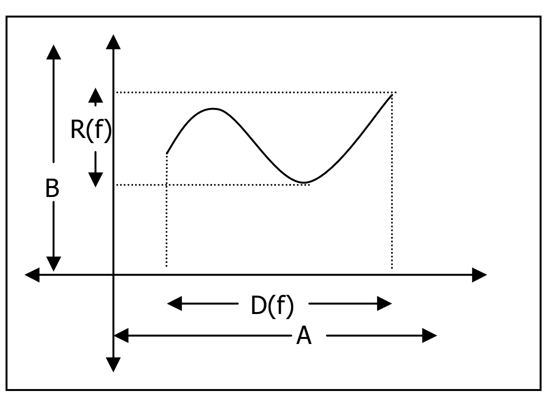
24) Relasi “tegak lurus dengan” pada himpunan garis-garis di ruang adalah non-transitif.
25) Relasi “tegak lurus dengan” pada himpunan garis-garis di bidang datar adalah in-transitif.
26) Relasi “anak dari” pada himpunan orang-orang adalan intransitif.
27) Relasi “sama dengan” pada himpunan bilangan real adalah ekuivalen.
28) Relasi “sama dan sebangun” pada himpunan segitiga di bidang datar adalah ekuivalen.

9.4 Fungsi

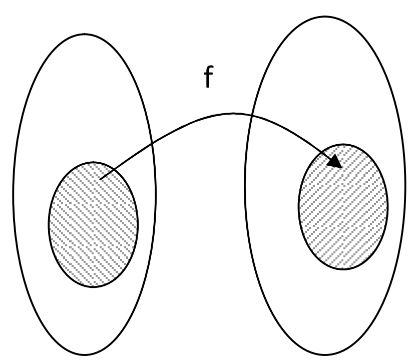
Suatu fungsi f dari A ke B adalah himpunan pasangan berurutan yang merupakan subset dari AxB sedemikian hingga jika (a,b) dan (a,b’) anggota f maka b=b’. Himpunan semua elemen A yang muncul sebagai elemen pertama f dinamakan domain f, dan dinyatakan dengan D(f). Himpunan semua elemen B yang muncul sebagai elemen kedua f dinamakan range f, dan dinyatakan dengan R(f). Dalam kasus khusus untuk D(f) = A,

f disebut pemetaan (mapping) dari A ke B dan ditulis f: A $\rightarrow$ B.

Jika (a,b) $\in$ f maka b=f(a) atau f : a $\rightarrow$ b.



(a)



(b)

Gambar 9.1(a) Fungsi sebagai grafik; (b) fungsi sebagai transformasi

Suatu fungsi dari himpunan A ke B dapat digambarkan sebagai grafik seperti pada gambar 9.1 (a) dan (b) di atas. Selanjutnya jika f={(x,y) / y = f(x) untuk setiap $x \in D(f)$} maka f(x) disebut rumus fungsi untuk f. Jika himpunan A=B maka fungsi f dari A ke B disebut fungsi pada A.

Contoh:

1) Misalkan f memasangkan setiap negara dengan benderanya maka f disebut suatu fungsi. Karena setiap negara memiliki satu bendera. Dan f(Indonesia) = merah putih.
2) Misalkan f suatu fungsi pada R yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ maka f(1) = 1,

   f(-2) = 4.
3) Misalkan f memasangkan setiap nomor sepatu mahasiswa dengan mahasiswa di Universitas Indonesia, maka f bukan fungsi.

9.4.1 Kesamaan fungsi

Definisi 9.4.1.1: Suatu fungsi f dan g dari himpuan A ke B dan D(f) = D(g) dikatakan sama jika untuk setiap $a \in D(f)$ maka f(a) = g(a).

Definisi 9.4.1.2: Jika f fungsi dengan domain D(f) dan $D_1 \subseteq D(f)$, didefinisikan suatu fungsi baru f_1 dengan domain D_1 dengan $f_1(x)=f(x)$ untuk setiap $x \in D_1$. Fungsi f_1 disebut restriksi dari f ke himpunan D_1.

Definisi 9.4.1.3: Jika f fungsi dengan domain D(f) dan $D_2 \supseteq D(f)$, didefinisikan suatu fungsi baru f_2 dengan domain D_2 dengan $f_2(x)=f(x)$ untuk setiap $x \in D(f)$. Fungsi f_2 disebut ekstensi dari f ke himpunan D_2.

Contoh:

1) Misalkan f suatu fungsi pada R, yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$. Dan fungsi g pada R didefinisikan sebagai $g(y) = y^2$. Maka f = g, karena D(f)=D(g) dan f(x)=g(x) untuk setiap $x \in D(f)$
2) Misalkan $f : R \rightarrow R$, yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$, dan fungsi g pada $R^+ \rightarrow R$ didefinisikan sebagai $g(x) = x^2$. g adalah merupakan restriksi dari f karena $R^+ \subseteq R$ dan untuk setiap $x \in R^+$, f(x) = g(x)
3) fungsi h: $R^+ \rightarrow R$ didefinisikan sebagai h(x) = x dan fungsi

   v: $R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai v(x) = |x|. Fungsi v disebut ekstensi dari fungsi h, karena $R \supseteq R^+$ dan untuk setiap $x \in R^+$, h(x) = v(x)

9.4.2 Komposisi fungsi.

Definisi 9.4.2: f suatu fungsi dengan domain D(f) di A dan range R(f) di B, g suatu fungsi dengan D(g) di B dan range R(g) di C. Komposisi g o f adalah fungsi dari A ke C dengan

$g \circ f = \{(a,c) \in AxC / (\exists b \in B).\ (a,b) \in f \wedge (b,c) \in g\}$

Contoh:

1) Misalkan f dan g fungsi pada bilangan real yang didefinisikan dengan f(x) = 2x dan $g(x) = 3x^2 - 1$. Karena D(g) himpunan semua bilangan real dan $R(f) \subseteq D(g)$, domain D(g o f) adalah R dan $g \circ f(x) = 3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1$. Di lain pihak D(f o g) = R, tetapi $f \circ g(x) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2$.
2) Jika h suatu fungsi dengan $D(h)=\{ x/ x \geq 1\}$ yang didefinisikan oleh $h(x) = \sqrt{x-1}$, dan jika f fungsi didefinisikan seperti pada (1) maka D(h o f)=$\{ x/ 2x \geq 1\}=\{ x/ x \geq ½ \}$ dan $hof(x) = \sqrt{2x-1}$. Begitu juga D(f o h) = $\{ x/ x \geq 1 \}$ dan f o h(x) = 2 $\sqrt{x-1}$.

Jika g fungsi yang didefinisikan seperti pada (1) maka D(h o g) ={ x/ $3x^2 - 1$}

= { x/ x $\leq$ - $\sqrt{2/3}$ atau x $\geq$ $\sqrt{2/3}$ } dan h o g(x)= $\sqrt{3x^2 - 2}$.

Begitu juga D(g o h) = { x / x $\geq$ 1} dan g o h(x) = 3x – 4.

3) Misalkan F dan G suatu fungsi dengan D(F) = { x / x $\geq$ 0 dan D(G)) = R, yang didefinisikan F(x)=$\sqrt{x}$ dan G(x)= $-x^2 - 1$. Maka D(G o F) = { x/ x $\geq$ 0 } dan G o F(x) = $-$ x – 1 sedangkan D(F o G) = { x $\in$ D(G) / G(x) $\in$ D(F)} = { } karena G(x) $<$ 0 untuk setiap x $\in$ D(G). Disini fungsi F o G tidak terdefinisi untuk setiap titik, sehingga F o G disebut "*Void function*" atau fungsi kosong.

9.4.3 Injektif

Definisi 9.4.3: f fungsi dengan domain D(f) di A dan range R(f) di B. f fungsi injektif (satu-satu) jika (a,b) dan (a',b) di f maka a=a'.

Dengan kata lain f injektif jika dan hanya jika f(a)=b dan f(a')=b maka a=a' atau f injektif jika dan hanya jika a$\neq$a' maka f(a)$\neq$f(a').

Contoh:

1) Fungsi f dengan D(f) = R dengan definisi f(x) = x^2 . f bukan fungsi injektif, karena (2,4) dan (– 2,4) anggota f tetapi 2 $\neq$ – 2.
2) Fungsi g dengan D(g) = R^+ dengan definisi g(x) = x^2 . g injektif, karena jika g(a) = g(b) $\Leftrightarrow$ $a^2 = b^2$ $\Leftrightarrow$ a = b untuk setiap a, b $\in$ R^+.

9.4.4 Fungsi invers

Definisi 9.4.4: f fungsi injektif dengan domain D(f) di A dan range R(f) di B. Jika g = {(b,a)$\in$BxA/ (a,b) $\in$ f} maka g injektif dengan D(g)=R(f) dan R(g)=D(f). g disebut invers dari f dan dinotasikan dengan f^{-1}.

Contoh:

1) Fungsi f dengan D(f) = R dengan definisi $f(x) = x^2$. f bukan fungsi injektif, karena (2,4) dan (– 2,4) anggota f tetapi $2 \neq -2$. Karena f tidak injektif maka f tidak memiliki invers.
2) Fungsi g dengan $D(g) = R^+$ dengan definisi $g(x) = x^2$. g injektif, karena jika g(a) = g(b) $\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ untuk setiap a, b $\in R^+$. g memiliki fungsi invers g^{-1} dengan $D(g^{-1}) = R(g) = R^+$ dan $R(g^{-1}) = D(g) = R^+$. Misalkan $y = x^2 = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$ sehingga $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ untuk setiap $y \in R^+$.

9.4.5 Bayangan langsung dan bayangan invers

Definisi 9.4.5: Misalkan f: A$\rightarrow$B, fungsi dengan domain A dan range B, f tidak harus injektif. Jika E subset A maka bayangan langsung E oleh f adalah f(E) dan $f(E) \subseteq B$.

$$f(E) = \{f(x)/\ x \in A\}$$

Jika H subset B maka bayangan invers dari H oleh f adalah $f^{-1}(H)$ dan $f^{-1}(H) \subseteq A$.

$$f^{-1}(H) = \{x/\ f(x) \in H\}$$

Perlu ditegaskan bahwa f tidak perlu injektif atau f^{-1} tidak perlu ada. Dalam kasus f^{-1} ada maka $f^{-1}(H)$ dapat dinyatakan sebagai bayangan langsung H oleh f^{-1}.

Contoh:

1) Jika f: R$\rightarrow$R didefinisikan dengan f(x)=2x+1 maka bayangan langsung E = $\{ x/\ -1 \leq x \leq 2\}$ adalah f(E) = $\{ y/\ -1 \leq y \leq 5\}$. Bayangan invers H = $\{ y/\ -3 \leq y \leq 3\}$ adalah $f^{-1}(H) = \{ x/\ -2 \leq x \leq 1\}$.

2) Misalkan $g:R \to R$ didefinisikan dengan $f(x)=x^2+1$ maka bayangan langsung $E = \{ x/ 0 \leq x \leq 2\}$ adalah $g(E)=\{ y/ 1 \leq y \leq 5\}$. Bayangan invers dari g(E) adalah $g^{-1}(g(E)) = \{x/ -2 \leq x \leq 2\}$.

9.4.6 Fungsi surjektif

Definisi 9.4.6: f fungsi dengan domain $D(f) \subseteq A$ dan range $R(f) \subseteq B$, f fungsi surjektif jika R(f) = B. dengan kata lain f surjektif jika dan hanya jika untuk setiap $b \in B$ ada $a \in A$ sedemikian hingga f(a)=b.

Contoh:

1) Fungsi f pada R dengan definisi $f(x) = x^2$. f bukan fungsi surjektif, karena untuk y= – 2, tidak ada elemen $a \in R$ sedemikian hingga f(a)=-2.
2) Fungsi $g: R \to R^+ \cup \{0\}$ dengan definisi $g(x) = x^2$. g surjektif, karena untuk setiap $b \in R^+ \cup \{0\}$ ada $a=\sqrt{b} \in R$ sedemikian hingga b=f(a).
3) Fungsi h: $[-1, 1] \to [-1, 1]$ yang didefinisikan $h(x) = x^3$ merupakan fungsi surjektif, karena h([-1,1]) = [-1, 1].
4) Fungsi φ: $[-1, 1] \to [-1, 1]$ yang didefinisikan $\varphi(x) = \sin x$, bukan merupakan fungsi surjektif. Karena tidak ada bilangan $a \in [-1,1]$ sedemikian hingga sin a = -1.

9.4.7 Fungsi Bijektif

Definisi 9.4.7: f suatu fungsi dengan domain $D(f) \subseteq A$ dan range $R(f) \subseteq B$, f disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika f injektif dan f surjektif.

Contoh:

1) Fungsi g pada R^+ dengan definisi $g(x) = x^2$. g injektif, karena jika $g(a) = g(b) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ untuk setiap $a, b \in R^+$. Begitu pula g surjektif, karena untuk setiap $b \in R^+$ ada $a=\sqrt{b} \in R^+$ sedemikian hingga b=f(a). Sehingga g bijektif.

2) Fungsi f pada R dengan definisi $f(x) = x^2$. f bukan fungsi injektif, karena (2,4) dan (– 2,4) anggota f tetapi $2 \neq -2$. Karena f tidak injektif maka f tidak bijektif.

9.4.8 Fungsi Konstan

Definisi 9.4.8: f suatu fungsi dengan domain $D(f) \subseteq A$ dan range $R(f) \subseteq B$, f disebut fungsi konstan jika dan hanya jika R(f) suatu himpunan dengan satu anggota *(singleton).*

Contoh:

1) Misalkan f fungsi pada R yang didefinisikan oleh f(x) = 7, maka f merupakan fungsi konstan. Karena R(f) ={7} yang merupakan singleton.
2) Apakah fungsi konstan dapat merupakan fungsi injektif? Ya, jika domain fungsi tersebut juga singleton.
3) Apakah fungsi konstan dapat merupakan fungsi surjektif? Ya, jika pasangan domain adalah himpunan singleton.

9.4.9 Fungsi Identitas

Definisi 9.4.9: A sebarang himpunan dan f suatu fungsi dari A ke A, f disebut fungsi identitas jika dan hanya jika f memasangkan setiap elemen $x \in A$ dengan dirinya sendiri. Dengan kata lain f fungsi pada A dikatakan fungsi identitas jika f(x) = x. Fungsi identitas pada A dinyatakan sebagai I_A.

Contoh:

f fungsi pada R yang didefinisikan sebagai f(x) = x, untuk setiap $x \in R$.

9.4.10 Fungsi Karakteristik

Misalkan A adalah sebarang subset dari himpunan universal S. maka fungsi bernilai riil.

$$x_A : S \rightarrow \{1,0\}$$

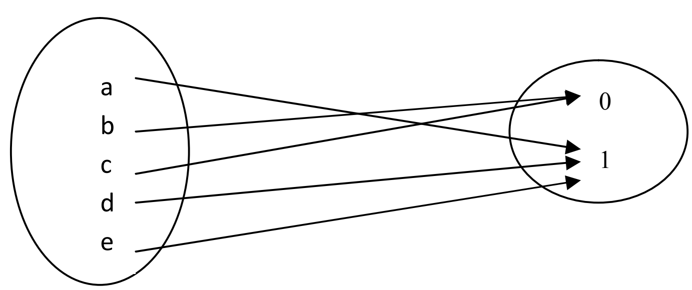
yang didefinisikan oleh

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \in A \\ 0 \text{ jika } x \notin A \end{cases}$$

dinamakan fungsi karakteristik dari A.

Contoh :

1) Misalkan U = {a, b, c, d, e} dan A = {a, d, e} maka fungsi dari U ke dalam {1, 0} yang didefinisikan oleh diagram berikut.



adalah fungsi karakteritik X_A dari A.

Selanjutnya perhatikan bahwa setiap fungsi $f : S \rightarrow \{1,0\}$ akan mendefinisikan sebuah subset $A_f = \{ x \mid x \in S, f(x) = 1\}$ dari S dan bahwa fungsi karakteristik x_{Af} , dari A_f adalah fungsi f yang asli (semula). Jadi terdapat fungsi bijektif diantara semua subset dari S, yakni himpunan kuasa (power set) dari S, dan himpunan semua fungsi dari S ke dalam {1, 0}.

9.5 Latihan

1. Misalkan A, B, dan C himpunan, berikan contoh penyangkal bahwa sifat-sifat berikut tidak berlaku:

1) AxB = BxA
2) (AxB)xC = Ax(BxC)
3) Ax(B$\cup$C) = AxB $\cup$ AxC
4) Ax(B$\cap$C) = AxB $\cap$ AxC
5) (A-B)xC = AxC – BxC

2. Misalkan R adalah relasi dalam A = {2, 3, 4, 5} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka “x dan y secara relatif bilangan prima”, yaitu “pembagi persekutuan untuk x dan y hanyalah 1”.

1) Carilah himpunan jawab dari R, yaitu, tuliskan R sebagai sebuah himpunan dari pasangan-pasangan terurut.
2) Buatlah sketsa R pada diagram Koordinat A x A.

3. Misalkan R adalah relasi dalam B = {2, 3, 4, 5, 6} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka “$|x-y|$ dapat dibagi oleh 3”. Tuliskan R sebagai himpunan dari pasangan-pasangan terurut.

4. Misalkan C = {1, 2, 3, 4, 5} dan relasi R dalam C adalah himpunan titik-titik yang diperlihatkan dalam diagram koordinat C x C berikut.

1) Nyatakan apakah masing-masing benar atau salah: (a) 1 R 4, (b) 2 R 5, (c) 3 R 1, (d) 5 R 3.
2) Tuliskan masing-masing subset C berikut dalam bentu pendaftaran:

   (a) $\{x \mid 3 \text{ R } x\}$ (c) $\{x \mid (x, 2) \notin R\}$

   (b) $\{x \mid (4, x) \in R\}$ (d) $\{x \mid x \text{ R } 5\}$
3) Carilah ranah (domain) dari R,
4) Carilah jangkauan (range) R,
5) Carilah R^{-1}.

5. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi dalam bilangan-bilangan riil. Buatlah sketsa masing-masing relasi pada diagram koordinat $R^{\#} \times R^{\#}$.

1) $y < x^2 - 4x + 2$
2) $x < y^2$
3) $y \geq \frac{x}{2} + 2$
4) $x \geq \sin y$

6. Misalkan $R = \{(x, y) \mid x \in R^{\#}, y \in R^{\#}, x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

1) Buatlah sketsa R pada diagram koordinat $R^{\#} \times R^{\#}$.
2) Carilah ranah dari R,
3) Carilah jangkauan R.

7. Misalkan $R = \{(x, y) \mid x \in R^{\#}, y \in R^{\#}, x^2 - y^2 \geq 4\}$.

1) Buatlah sketsa R pada diagram koordinat $R^{\#} \times R^{\#}$.
2) Carilah ranah dari R,
3) Carilah jangkau R.
4) Definisikan R^{-1}.

8. Misalkan R adalah relasi dalam bilangan-bilangan asli N yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x + 3y = 12". Dengan perkataan lain, misalkan $R = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, x + 3y = 12\}$

1) Tuliskan R sebagai himpunan pasangan-pasangan terurut.
2) Carilah ranah dari R,
3) Carilah jangkau R,
4) Tentukan R^{-1}.

9. Misalkan R adalah relasi dalam bilangan-bilangan asli N yang didefinisikan oleh $2x + 4y = 15$.

1) Tuliskan R sebagai himpunan pasangan-pasangan terurut.
2) Carilah ranah dari R,

3) Carilah jangkau R,
4) tentukan R^{-1}.

10 Misalkan W = {1, 2, 3, 4}/ pandang relasi-relasi berikut dalam W:

R_1 = {(1,1), (1,2)} R_4 = {(1,1), (2,2), (3,3)}

R_2 = {(1,1), (2,3), (4,1)} R_5 = W x W

R_3 = {(1,3), (2,4)}

Nyatakan apakah masing-masing relasi ini (1) simetris, (2) anti-simetri, (3) transitif, (4) refleksif, ataukah tidak.

11 Nyatakan apakah masing-masing pernyataan berikut benar- atau salah. Anggap R dan R^1 adalah relasi-relasi dalam sebuah himpunan A.

1) Jika R simetris maka R^{-1} simetris
2) Jika R anti-simetris, maka R^{-1} anti-simetris
3) Jika R refleksif, maka $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.
4) Jika R simetris , makaR $\cap R^{-1} \neq \emptyset$.
5) Jika R transitif dan R-1 transitif, maka R $\cup$ R-1 transitif.
6) Jika R transitif dan R^{-1} transitif, maka $R \cap R^{-1}$ transitif.
7) Jika R anti-simetris dan R^{-1} anti-simetris, maka $R \cup R^{-1}$ anti-simetris.
8) Jika R anti-simetris dan R^{-1} anti-simetris, maka $R \cap R^{-1}$ anti-simetris.
9) Jika R refeleksif dan R^{-1} reflektif, maka $R \cup R^{-1}$ refleksif.
10) Jika R refeleksif dan R^{-1} reflektif, maka $R \cap R^{-1}$ refleksif.

12 Misalkan L himpunan dari garis-garis dalam bidang Euklid dan R adalah relasi dalam L yang didefinisikan oleh “x sejajar y”. Nyatakan apakah R (1) refleksif, (2) simetris, (3) anti-simetris, (4) transitif, ataukah tidak. (Anggap sebuah garis sejajar dirinya sendiri).

13 Misalkan L himpunan dari garis-garis dalam bidang Euklid dan R adalah relasi dalam L yang didefinisikan oleh “x tegaklurus y”. Nyatakan apakah R (1) refleksif, (2) simetris, (3) anti-simetris, (4) transitif.

14 Misalkan A keluarga himpunan-himpunan dan R adlah relasi dalam A yang didefinisikan oleh “x terpisah dari y”. Nyatakan apakah R (1) refleksif, (2) simetris, (3) anti-simetris, (4) transitif, ataukah tidak.

15 Jenis relasi apakah R jika (1) $R \cap R^{-1} = \emptyset$, (2) $R = R^{-1}$?

16 Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi dalam bilangan-bilangan asli N.

1) “ x lebih besar daripada y”
2) “x kali y adalah kuadrat dari sebuah bilangan”
3) “ x adalah kelipatan y”
4) “x + 3y = 12”

Nyatakan apakah masing-masing relasi ini (a) refleksif, (b) simetris, (c) anti-simetris, (d) transitif, ataukah tidak.

17 Misalkan T = {a, b, c, d}. Pandang relasi-relasi berikut dalam T:

1) R_1 = {(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)}
2) R_2 = {(b,a), (c,d), (b,a), (a,b), (d,b)}
3) R_3 = {(d,c), (c,b), (a,b), (d,d)}
4) R_4 = {(a,a), (b,a), (c,a), (d,d)}
5) R_5 = {(b,a), (a,c), (d,d)}

Nyatakan apakah relasi ini suatu fungsi ataukah tidak.

18 Misalkan A = [-4, 4], B = [0, 4], C = [-4, 0], dan kalimat terbuka P (x,y) berbunyi “$x^2 + 4y^2 = 16$”. Pandang relasi-relasi berikut:

(1) R_1 = (A, B, P(x,y))
(2) R_2 = (A, C, P(x,y))
(3) R_3 = (B, A, P(x,y))
(4) R_4 = (B, C, P(x,y))

Buatlah sketsa masing-masing relasi pada bidang Kartesis seperti dalam soaldan kemudian nyatakan apakah relasi-relasi ini suatu fungsi ataukah tidak.

19 Misalkan A = $[0, \infty)$, B = $(-\infty, 0]$, C = $[2, \infty)$, D = $(-\infty, -2)$, dan kalimat terbuka P(x, y) berbunyi "$x^2 - y^2 = 4$". Pandang relasi

$$R = (X, Y, P(x, y))$$

Dimana X dan Y adalah himpunan yang tak diketahui. Jika X dan Y masing-masingnya adalah empat himpunan di atas, maka yang manakah dari enambelas relasi ini adalah fungsi? (petunjuk; pertama gambarkan P(x,y) pada bidang Kartesis).

20 Misalkan A sebarang himpunan.

1) Apakah terdapat lebih daripada satu relasi refleksif dalam A yang mana adalah suatu fungsi?
2) Apakah terdapat sebarang relasi refleksif dalam A yang mana adalah suatu fungsi?

21 Buktikan: Misalnya A tak kosong dan R relasi transitif dalam A yang tidak mengandung "elemen-elemen diagonal" $(x,x) \in A \times A$; maka R bukan suatu fungsi dalam A.

Bab X
KARDINALITAS

10.1 Himpunan yang ekuivalen

Pada bab terdahulu telah dibahas dua himpunan yang ekuivalen untuk himpunan terhingga, yaitu "dua himpunan A dan B dikatakan ekuivalen jika #(A) = #(B)". Timbul pertanyaan, bagaimana jika himpunan A dan B tak terhingga? Karena #(A) dan #(B) tidak dapat ditentukan.

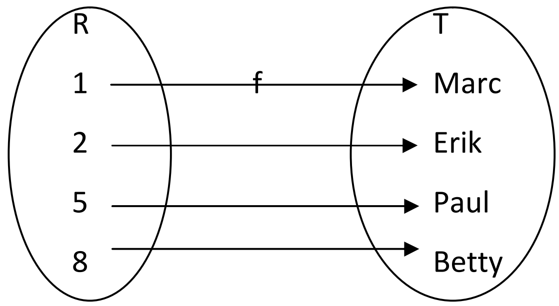
Untuk himpunan yang tak berhingga maka jawabnya bergantung pada bagaimana kita mendefinisikan supaya dua himpunan mempunyai banyaknya elemen yang sama, yakni, seperti yang akan kita katakan, supaya kedua himpunan tersebut ekuivalen. Pada suatu waktu semua himpunan tak berhingga dianggap ekuivalen satu sama lain. Definisi berikut, yang telah merombak keseluruhan teori himpunan, dihubungkan dengan karya sarjana matematika Jerman yang bernama George Cantor (1845-1918).

Definisi 10.1: Himpunan A ekuivalen dengan himpunan B, yang dinyatakan oleh: A ~ B Jika terdapat sebuah fungsi ƒ : A → B yang bijektif.

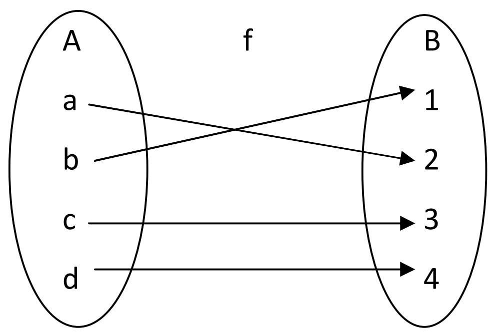
Contoh :

Misalkan M = {1, 2, 3} dan N = {1, 2}. Jika kita mendaftar semua fungsi M ke dalam N, maka tidak satu pun diantaranya yang bijektif. Maka M tidak ekuivalen dengan N.

Misalkan R = {1, 2, 5, 8} dan T = {Marc, Eric, Paul, Betty}. Diagram berikut mendefinisikan sebuah fungsi dari R ke dalam T yang bijektif. Maka R ekuivalen dengan T.



Misalkan A ={ a, b, c, d} dan B= {1, 2, 3, 4} didefinisikan suatu fungsi f menurut diagram berikut:



Karena f bijektif maka A ekuivalen dengan B.

Tinjaulah lingkaran-lingkaran konsentris

$C_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2\}$, $\quad C_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = b^2\}$

Di mana, katakanlah $0 < a < b$, dapatkanlah secara geometris bijektif diantara C_1 dan C_2.

Penyelesaian:

Misalkan $x \in C_2$. Tinjaulah fungsi $f : C_2 \rightarrow C_1$ dimana $f(x)$ adalah titik perpotongan jari-jari dari pusat C_2 (dan C_1) ke x, dan C_1, seperti yang diperlihatkan dalam diagram disamping.

Perhatikan bahwa f adalah fungsi yang bijektif.

Jadi f mendefinikan bijektif diantara C_1 dan C_2.

Buktikan:

(a) $[0, 1] \sim (0, 1)$, (b) $[0, 1] \sim [0, 1)$, (c) $[0, 1] \sim (0,]$.

Pemecahan :

Perhatikan bahwa

$[0, 1] = \{0, 1, - ½ , 1/3, \ldots\} \cup A$

$(0, 1) = \{½ , 1/3, ¼, \ldots\} \cup A$

dengan

$A = [0, 1] – \{0, 1, ½, 1/3, \ldots\} = (0, 1) – \{1/2, 1/3, \ldots\}$

Tinjaulah fungsi ƒ : [0, 1] → (0, 1) yang didefinisikan oleh diagram berikut:

Dengan kata lain

$$ƒ(x) = \begin{cases} ½ & \text{jika } x = 0 \\ 1/(n + 2) & \text{jika } x = 1/n,\ n \in N \\ x & \text{jika } x \neq 0, 1/n,\ n \in N \end{cases}$$

fungsi ƒ adalah fungsi bijektif.

Sebagai konsekuensinya, [0, 1] ~ (0, 1).

Fungsi ƒ: [0, 1] → [0, 1) yang didefinisikan oleh

$$ƒ(x) = \begin{cases} 1/(n + 1) & \text{jika } x = 1/n,\ n \in N \\ x & \text{jika } x \neq 1/n,\ n \in N \end{cases}$$

adalah fungsi bijektif. (Fungsi tersebut serupa dengan fungsi dalam bagian (a)). Maka [0, 1] ~ [0,1)

Misalkan ƒ: [0, 1) → (0, 1] adalah fungsi yang didefinisikan oleh ƒ(x) = 1 – x. Maka ƒ adalah fungsi bijektif, dan karena itu maka, [0, 1) ~ (0, 1]. Menurut bagian (b) dan definisi 10.1, maka [0, 1] ~ (0,1].

Buktikan: Untuk sebarang himpunan A dan B, maka $A \times B \sim B \times A$

Pemecahan :

Fungsi $f: A \times B \rightarrow B \times A$ yang didefinisikan oleh

$$f((a, b)) = (b, a), \quad (a \in A, b \in B)$$

adalah fungsi bijektif; maka $A \times B \sim B \times A$

Buktikan: Untuk sebarang himpunan A, B dan C, maka

$(A \times B) \times C \sim A \times B \times C \sim A \times (B \times C)$

Penyelesaian :

Fungsi $f: (A \times B) \times C \rightarrow A \times B \times C$ yang didefinisikan oleh

$$f((a, b), c) = (a, b, c), (a \in A, b \in B, c \in C)$$

adalah fungsi bijektif; maka $(A \times B) \times C \sim A \times B \times C \sim A \times (B \times C)$.

Demikian juga, $A \times (B \times C) \sim A \times B \times C$

Jadi $(A \times B) \times C \sim A \times B \times C \sim A \times (B \times C)$

Jika diperiksa contoh di atas, maka tidak sukar untuk melihat bahwa umumnya, dua himpunan berhingga ekuivalen satu sama lain jika dan hanya jika kedua himpunan tersebut mengandung banyaknya elemen yang sama. Maka, untuk himpunan berhingga, Definisi 10.1 bersesuaian dengan arti biasa dari dua himpunan yang mengandung banyaknya elemen yang sama.

Contoh :

1) Misalkan $G = [0, 1]$ dan $H = [2, 5]$ dan misalkan $f : G \rightarrow H$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = 3x + 2$

   Perhatikan bahwa f adalah fungsi yang bijektif, maka $G \sim H$, yakni G ekuivalen dengan H.

2) Misalkan $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dan $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Fungsi $f : N \rightarrow E$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x$, adalah fungsi yang bijektif. Maka $N \sim E$.

Dalam contoh diperlihatkan bahwa himpunan N yang tak berhingga, yakni himpunan semua bilangan asli, ekuivalen dengan subset sejati (proper subset) dari dirinya sendiri. Sifat ini adalah karakteristik himpunan tak berhingga. Ternyata secara formal, dapat dinyatakan.

Definisi 10.2: Sebuah himpunan dikatakan tak berhingga (infinite) jika himpunan tersebut ekuivalen dengan sebuah subset sejatinya sendiri.

1) Misalkan A dan B adalah dua himpunan sebarang. Maka $A \sim A \times \{1\}$ dan $B \sim B \times \{2\}$

   Karena fungsi-fungsi $f : a \rightarrow (a, 1), a \in A$ dan

   $g : b \rightarrow (b, 2), b \in B$ adalah fungsi bijektif.

   Lagi pula, walaupun A dan B tidak perlu terputus, namun perhatikan bahwa.

   $A \times \{1\} \cap B \times \{2\} = \emptyset$

   Karena setiap pasangan teratur dalam $A \times \{1\}$ mengandung 1 sebagai elemen kedua, dan setiap pasangan teratur dalam $B \times \{2\}$ mengandung 2 sebagai elemen kedua.

Dari contoh di atas dapat digeneralisasi dalam teorema 10.1 yang akan digunakan kelak dalam bab ini.

Teorema 10.1: Hubungan dalam himpunan yang didefinisikan oleh $A \sim B$ adalah sebuah hubungan kesetaraan. Secara spesifik,

(1) $A \sim A$ untuk setiap himpunan A.

(2) Jika $A \sim B$, maka $B \sim A$,

(3) Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, maka $A \sim C$

Bukti:

(1) Fungsi identitas $1_A : A \rightarrow A$ adalah fungsi bijektif; maka $A \sim A$.

(2) Jika $A \sim B$, maka terdapat sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dan fungsi $g: B \rightarrow C$ yang bijektif. Maka f mempunyai sebuah fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ yang juga bijektif.

    Maka $A \sim B$ menyatakan $B \sim A$

(3) Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, maka terdapat fungsi $f : A \rightarrow B$ dan fungsi $g : B \rightarrow C$ yang bijektif.

Maka fungsi hasil kali $g \circ f: A \rightarrow C$ adalah juga bijektif.

Berarti A ~ B dan B ~ C menyatakan A ~ C

10.2 Himpunan Denumerabel

Telah cukup dikenal himpunan bilangan asli N = {1, 2, 3, …}.

Definisi 10.3: Jika sebuah himpunan D ekuivalen dengan N, yakni himpunan bilangan asli, maka D dinamakan denumerabel dan dikatakan mempunyai kardinalitas ά.

Definisi 10.4: Sebuah himpunan dinamakan kontabel jika himpunan tersebut berhingga atau denumerabel dan sebuah himpunan dinamakan non kontabel jika himpunan tersebut tak berhingga dan jika himpunan tersebut tidak ekuivalen dengan N, yakni jika himpunan tersebutnon denumerabel.

Contoh :

1) setiap urutan tak berhingga (infinite sequence) $a_1, a_2, a_3, \ldots$

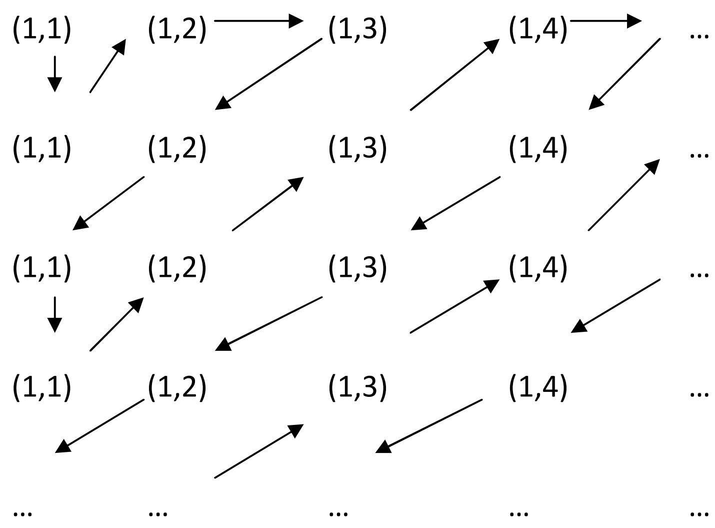
   dari elemen-elemen yang berlainan adalah himpunan yang denumerabel, karena sebuah urutan pada pokoknya adalah sebuah fungsi $f(n) = a_n$ yang ranahnya N. Jadi jika a_n tersebut berlainan, maka fungsi tersebut bijektif. Maka setiap himpunan yang berikut adalah himpunan yang denumerabel:

   {1, ½, 1/3, …, 1/n, …}

   {1, -2, 3, -4, …, $(-1)^{n-1}$ n, …)

   ((1, 1), (4, 8), (9, 27), …, (n^2, n^3), …}

2) Tinjauan himpunan hasil kali N x N seperti yang dipertunjukkan dalam gambar 10.1



Gambar 10.1:

himpunan N x N dapat ditulis dalam sebuah urutan tak berhingga dari elemen-elemen yang berlainan sebagai berikut:

{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), …}

(Perhatikan bahwa urutan tersebut ditentukan dengan "mengikuti panah" dalam gambar 10.1. Jadi karena alasan-alasan yang dinyatakan dalam contoh 1), maka N x N denumerabel.

3) Misalkan M = {0, 1, 2, …} = N $\cup$ {0}. Nah setiap bilangan asli a ε N dapat dituliskan secara unik dalam bentuk a = 2' (2s + 1)

dengan r dan s adalah seperti yang di atas. Maka adalah sebuah fungsi bijektif. Jadi M x M denumerabel. Perhatikan bahwa N x N adalah sebuah subset dari M x M.

Teorema-teorema berikut akan membicarakan mengenai himpunan denumerabel.

Teorema 10.2: Tiap-tiap himpunan tak berhingga mengandung sebuah subset yang denumerabel.

Bukti:

Misalkan $f: 2^A \rightarrow A$ adalah fungsi pilihan. Tinjaulah urutan yang berikut:

$a_1 = f(A)$

$a_2 = f(A - \{a_1\})$

$a_3 = f(A - \{a_1, a_2\})$

…………………………………

$a_n = f(A - \{a_1, \ldots, a_{n-1}\})$

…………………………………

karena A tak berhingga, maka $A - \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ tidak kosong untuk sebarang $n \in N$. Lagi pula, karena f adalah sebuah fungsi pilihan, maka $a_n \neq a_1$ di mana $i < n$
Jadi semua a_n berlainan, sehingga $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ adalah himpunan yang denumerabel.

Pada pokoknya, fungsi pilihan f "memilih" sebuah elemen $a_1 \in A$, kemudian memilih sebuah elemen a_2 dari elemen-elemen yang "tetap berada" dalam A, dan lain sebagainya. Karena A tak berhingga, maka himpunan elemen yang "tetap berada" dalam A tidak merupakan himpunan kosong.

Teorema 10.3: Sebuah subset dari sebuah himpunan yang denumerabel adalah subset yang berhingga atau subset yang denumerabel.

Bukti :

Misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (10.2.1)

Adalah sebarang himpunan denumerabel dan misalkan B adalah sebuah subset dari A. jika $B = \emptyset$, maka B berhingga. Jika $B \neq \emptyset$, maka misalkan a_{n1} adalah elemen pertama dalam urutan dalam (10.2.1) sehingga $a_{n1} \in B$; misalkan a_{n2} adalah elemen pertama yang mengikuti a_{n1} dalam urutan dalam (10.2.1) sehingga $a_{n2} \in B$; dan seterusnya.

Maka $B = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots\}$

Jika himpunan bilangan bulat $\{n_1, n_2, \ldots\}$ terbatas, maka B berhingga.

Jika tidak maka B denumerabel.

Teorema Akibat 10.4: sebuah subset dari sebuah himpunan yang kontabel adalah subset yang kontabel.

Teorema 10.5: Misalkan A_1, A_2, A_3, … adalah keluarga yang denumerabel dari himpunan yang terputus secara sepasang-sepasang (pairwise disjoint), dan setiap himpunan adalah himpunan yang denumerabel. Maka gabungan himpunan $U_{i\,\varepsilon\,N}\,A_I$ adalah himpunan yang denumerabel.

Teorema Akibat 10.6: Misalkan $\{A_i\}_{i\,\varepsilon\,I}$ adalah sebuah keluarga yang kountabel dari himpunan-himpunan yang kontabel. Maka $U_{i\,\varepsilon\,N}\,A_i$ adalah himpunan yang kontabel.

Selanjutnya diikuti sebuah contoh yang sangat penting, dari sebuah himpunan yang denumerabel.

Contoh :

1) Misalkan Q^+ adalah himpunan bilangan rasional yang positif dan misalkan Q^- adalah himpunan bilangan rasional yang negatif. Maka $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ adalah himpunan bilangan rasional.

   Misalkan fungsi $f : Q^+ \rightarrow N \times N$ didefinisikan oleh

   $$f(p/q) = (p, q)$$

   dengan p/q adalah sebarang anggota dari Q^+ yang dinyatakan sebagai perbandingan dari dua bilangan bulat positif yang relatif prima. Perhatikan bahwa f injektif, sehingga Q^+ ekuivalen dengan sebuah subset dari N x N. Menurut Teorema 10.5 dan contoh 2), maka Q^+ denumerabel. Demikian juga Q^- adalah himpunan yang denumerabel. Maka himpunan bilangan rasional, yang merupakan gabungan dari Q^+, {0} dan Q^-, adalah himpunan yang denumerabel.

10.3 Kontinu

Tidak tiap-tiap himpunan tak berhingga merupakan himpunan yang denumerabel. Teorema berikutnya memberikan sebuah contoh spesifik yang sangat penting.

Teorema 10.7: interval satuan [0, 1] tidak denumerabel.

Dua bukti teorema ini muncul dalam bagian mengenai soal-soal yang dipecahkan.

Metode 1. Anggaplah yang bertentangan dengan teorema tersebut; maka

$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

Yakni elemen-elemen dari A dapat dituliskan dalam sebuah urutan.

Setiap elemen dalam A dapt dituliskan dalam bentuk sebuah desimal tak berhingga sebagai berikut:

$x_1 = 0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \ldots$

$x_2 = 0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$

$x_3 = 0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \ldots a_{3n} \ldots$

…………………………

$x_n = 0.\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{1n} \ldots$

dimana $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9)$ dan dimana setiap desimal mengandung sejumlah tak berhingga elemen yang tak sama dengan nol. Di sini tuliskanlah 1 sebagai 0,999 … dan, untuk bilangan-bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk sebuah desimal dalam dua cara, misalnya,

½ = .5000… = .4999…

(dalam salah satu di ataranya terdapat sejumlah tak berhingga bilangan sembilan dan dalam yang lainnya maka semua angka kecuali sebuah himpunan berhingga dari angka adalah nol), maka tuliskanlah desimal tak berhingga tersebut dalam mana muncul sejumlah tak berhingga bilangan sembilan.

Sekarang bentuklah bilangan riil

$Y = 0.\ b_1\ b_2\ b_3 \dots b_n \dots$

Yang merupakan elemen dari A, dengan cara berikut: pilihlah b_1 sehingga $b_1 \neq 0$, pilihlah b_2 sehingga $b_2 \neq a_{22}$ dan $b_2 \neq 0$, dan demikian setrusnya.

Perhatikan bahwa $y \neq x_1$ karena $b_1 \neq a_{11}$ (dan $b_1 \neq 0$), $y \neq x_2$, karena $b_2 \neq a_{22}$ (dan $b_2 \neq 0$), dan demikian seterusnya, yakni $y \neq x_n$, untuk $n \in N$; maka $y \notin A$, yang bertentangan dengan kenyataan bahwa $y \in A$. Jadi anggapan bahwa A denumerabel telah menghasilkan sebuah kontradiksi. Sebagai konsekuensinya, maka A tidak denumerabel.

Metoda 2. (Dalam bukti kedua dari Teorema 10.7, digunakan sifat bilangan riil yang berikut: Misalkan $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2\ [a_2, b_2]$, …adalah sebuah urutan interval tertutup untuk mana $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ maka terdapat sebuah bilangan riil y dengan sifat bahwa y adalah elemen dari tiap-tiap interval.).

Anggapan hal yang bertentangan teorema tersebut. Maka, seperti di atas,

$A = \{x_1, x_2, \dots\}$

Sekarang bentuklah sebuah urutan interval tertutup $I_1, I_2, \dots$ sebagai berikut. Tinjaulah ke tiga sub interval tertutup yang berikut dari [0, 1],

$$[0, 1/3], \qquad [1/3, 2/3], \qquad [2/3, 1] \qquad (10.3.1)$$

yang masing-masing mempunyai panjang 1/3. Nah x_1 tidak dapat merupakan elemen dari semua ketiga interval tersebut. (Jika x_1 adalah salah satu titik ujung, maka x_1 mungkin merupakan elemen dari dua interval). Misalkan $I_1 = [a_1, b_1]$ adalah salah satu dari interval dalam (10.3.1) sehingga $x_1 \notin I_1$.

Sekarang tinjaulah ketiga sub interval tertutup dari $I_1 = [a_1, b_1]$, yang berikut,

$$[a_1, a_1 + 1/9],\ [a_1 + 1/9, a_1 + 2/9],\ [a_1 + 2/9, b_1] \qquad (10.3.2)$$

yang masing-masing mempunyai panjang 1/9. Demikian juga, misalkan I_2 adalah salah satu dari interval dalam (10.3.2) dengan sifat bahwa x_2 tidak merupakan elemen dari I_2. teruskanlah dengan cara ini.

Jadi kita mempunyai sebuah urutan interval tertutup

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \qquad (10.3.3)$$

Sehingga $x_n \notin I_n$ untuk tiap=tiap $n \in N$.

Menurut sifat bilangan riil yang di atas, maka terdapat sebuah bilangan riil y $\in [0, 1]$, sehingga y merupakan elemen dari tiap-tiap interval dalam (10.3.3). Tetapi karena

$$y \in A = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

Maka $y = x_m$ untuk suatu $m \in N$. maka menurut pembentukan yang kita lakukan maka $y = x_m \notin I_m$, yang bertentangan dengan kenyataan bahwa elemen dati tiap-tiap interval dalam (10.3.3). Jadi anggapan kita bahwa A denumerabel telah menghasilkan sebuah kontradiksi. Sesuai dengan itu, maka A tidak denumerabel.

Definisi 10.5: Misalkan sebuah himpunan A ekuivalen dengan interval [0, 1]. Maka A dikatakan mempunyai kardinalitas (cardinality) **c** dan mempunyai kuasa kontinu (power of the continum).

Contoh:

1) Misalkan [a, b] adalah sebarang interval tertutup dan misalkan

   $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh

   $f(x) = a + (b - a)x$

   Perhatikan bahwa f adalah fungsi bijektif. Jadi [a, b] mempunyai kardinalias c. Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa setiap interval terbuka atau interval setengah terbuka juga mempunyai kardinalitas c.

2) Fungsi $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R^{\#}$, yang didefinisikan oleh $f(x) = \tan x$, adalah fungsi bijektif; maka $R^{\#} \sim (-\pi/2, \pi/2)$.

   Maka himpunan bilangan riel $R^{\#}$ mempunyai pangkat kontinu, yakni mempunyai kardinalitas c.

10.4 Bilangan Kardinal

Perhatikan sekali lagi, menurut Teorema 10.1, bahwa hubungan dalam himpunan yang didefinisikan oleh

$$A \sim B$$

Adalah sebuah hubungan kesetaraan. Maka menurut Teorema Fundamental mengenai Hubungan Kesetaraan, semua himpunan dipartisi ke dalam kelas-kelas yang terputus dari himpunan-himpunan yang ekuivalen.

Definisi 10.6: Misalkan A adalah sebarang himpunan dan misalkan α menyatakan keluarga himpunan yang ekuivalen dengan A. maka α dinamakan sebuah bilangan kardinal (cardinal number) (atau, dinamakan, kardinal saja) dan dinyatakan oleh $\alpha = \#(A)$

Definisi 10.7: Bilangan kardinal dari setiap himpunan

$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots$

Berturut-turut dinyatakan oleh 0, 1, 2, 3, …, dan dinamakan kardinal berhingga (finite cardinal).

Definisi 10.8: Bilangan-bilangan kardinal dari N, yakni himpunan semua bilangan asli, dan interval satuan [0, 1] dinyatakan oleh $\#(N) = a$, $\#([0, 1]) = c$

10.5 Latihan

1) Bilangan bulat Z dapat dikorespondensikan satu-satu dengan bilangan asli N, sebagai berikut

1	2	3	4	5	6	7	….
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
0	1	-1	2	-2	3	-3	….

Carilah rumus suatu fungsi yang bijektif f dari N ke Z yang mendifinisikan hubungan di atas.

2) NxN dituliskan sebagai sebuah urutan yang meninjau gambar 10.1. ini bukanlah satu-satunya cara untuk menuliskan NxN sebagai sebuah urutan. Tuliskah dua contoh lain yang mendefinisikan suatu urutan pada NxN.
3) Buktikan : Jika A dan B denumerabel maka AxB denumerabel.
4) Buktikan bahwa: Himpunan titik-titik pada bidang rasional adalah denumerabel.
5) Sebuah bilangan real x dinamakan transenden jika x tidak merupakan bentuk aljabar, yaitu jika x tidak merupakan penyelesaian persamaan polinomial,

   $P(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

   Dengan koefisien yang bulat. Misalkan π dan e adalah bilangan transenden. Buktikan bahwa himpunan bilangan transenden tidak denumerabel.
6) Buktikan teorema 10.5: Misalkan A_1, A_2, A_3, … adalah keluarga yang denumerabel dari himpunan yang terputus secara sepasang-sepasang (pairwise disjoint), dan setiap himpunan adalah himpunan yang denumerabel. Maka gabungan himpunan $U_{i \varepsilon N} A_i$ adalah himpunan yang denumerabel.

Bab XI

HIMPUNAN TERURUT PARSIAL

11.1 Himpunan Terurut Parsial (poset)

Sebuah urutan parsial dalam sebuah himpunan A adalah sebuah hubungan R dalam A yang

(1) refleksif, yakni (a, a) $\in$ R untuk tiap-tiap a $\in$ A,

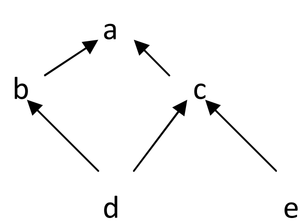
(2) anti simetris, yakni (a, b) $\in$ R dan (b, a) $\in$ R menyatakan a = b

(3) transitif, yakni (a, b) $\in$ R dan (b, c) $\in$R menyatakan (a, c) $\in$ R.

selanjutnya jika sebuah hubungan R dalam A mendefinisikan sebuah urut parsial dalam A, maka (a, b) $\in$R dinyatakan oleh a $\leq$ b yang dibaca “a mendahului b”.

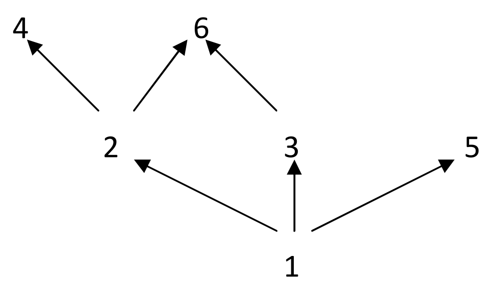
Contoh

1) Misalkan A adalah sebuah keluarga himpunan. Maka hubungan dalam A yang didefinisikan oleh “x adalah sebuah subset dari y” adalah sebuah urut parsial dalam A
2) Misalkan A adalah sebarang subset dari bilangan-bilangan riil. Maka hubungan dalam A yang didefinisikan oleh “x $\leq$ y” adalah sebuah urutan parsial dalam A. Hubungan tersebut dinamakan urutan alami dalam A.
3) Misalkan R adalah hubungan dalam bilangan asli N yang didefinisikan oleh “ x adalah sebuah kelipatan y”; maka R adalah sebuah urut parsial, dalam N. Lagi pula, 6 $\leq$ 2, 15 $\leq$ 3 dan 17 $\leq$ 17.
4) Misalkan W = {a, b, c, d, e}. Maka diagram



mendefinisikan sebuah urutan parsial dalam W dengan cara berikut: $x \leq y$ jika $x = y$ atau jika kita dapat pergi dari x ke y dalam diagram tersebut, yang selalu bergerak dalam arah yang ditunjukkan, yakni ke atas. Perhatikan bahwa $b \leq a$, $d \leq a$ dan $e \leq c$.

5) Misalkan R adalah hubungan dalam V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} yang didefinisikan oleh "x membagi y". Maka R adalah sebuah urutan parsial dalam V. Urutan parsial dalam V ini dapat juga dijelaskan oleh diagram berikut yang serupa dengan diagram dalam contoh sebelumnya, dan yang serupa dengan diagram garis yang dibentuk untuk keluarga-keluarga himpunan:



6) Misalkan R adalah hubungan dalam sebuah keluarga himpunan yang didefinisikan oleh "X ekuivalen dengan sebuah subset dari Y" (yakni $X \leq Y$). Menurut Teorema terdahulu, R refleksif dan transitif; dan menurut Teorema Schroder-Bernstein, maka R anti simetris. Maka R adalah sebuha urutan parsial dalam keluarga himpunan tersebut.

   Walaupun simbol ≤ sebelumnya dugunakan untuk menyatakan sebuah hubungan dalam himpunan, namun hubungan tersebut, seperti terlihat dalam contoh ini, adalah sebuah urutan parsial.

Definisi 11.1: Sebuah himpunan A bersama-sama dengan sebuah hubungan urutan parsial R yang spesifik dalam A dinamakan sebuah himpunan terurut parsial *(partially order set).*

Perhatikan bahwa sebuah himpunan terurut parsial terdiri dari sebuah himpunan A dan sebuah jenis hubungan R yang spesifik dalam A; karena alasan ini, maka sebuah himpunan terurut parsial kadang-kadang dinyatakan oleh pasangan terurut (A, R) atau (A, ≤).

Dalam pembahasan ini dan berikutnya disepakati bahwa setiap himpunan bilangan riil diurutkan oleh urutan alami kecuali jika urutan lainnya dinyatakan secara eksplisit.

Notasi tambahan berikut digunakan terhadap himpunan terurut parsial:

$a < b$ berarti $a \leq b$ dan $a \neq b$; dibaca "a secara seksama mendahului b"

$b \geq a$ berarti $a \leq b$; dibaca "b mendominasi a".

$b > a$ berarti $a < b$; dibaca "b secara seksama mendominasi a"

$\not\geq$, $\not\leq$, $\not<$, dan $\not>$ mempunyai arti yang sudah jelas.

Dua elemen a dan b dalam sebuah himpunan terurut parsial dikatakan tak terbandingkan (*not comparable*) jika

$$a \not\geq b \text{ dan } \quad b \not\leq a$$

yakni jika tidak satupun dari elemen-elemen tersebut yang mendahului yang lainnya. Dalam contoh 5), bilangan 3 dan bilangan 5 tidak terbandingkan karena tidak satupun dari bilangan-bilangan tersebut yang merupakan kelipatan dari yang lainnya.

Teorema 11.1: Jika sebuah hubungan R dalam sebuah himpunan A adalah hubungan yang refleksif, anti-simetris dan transitif, maka hubungan invers R^{-1} adalah juga hubungan yang refleksif, anti-simetris dan transitif. Dengan kata lain, jika R mendefinisikan sebuah urutan parsial dalam A maka R^{-1} juga mendefinisikan sebuah urutan parsial dalam A yang dinamakan urutan invers.

11.2 Himpunan Terurut Total

Perkataan "parsial" digunakan dalam mendefinisikan sebuah urutan parsial dalam sebuah himpunan A karena beberapa elemen dalam A tidak perlu terbandingkan. Sebaliknya, jika tiap-tiap dua elemen dalam sebuah himpunan terurut parsial A adalah elemen-elemen yang terbanding, maka urutan parsial dalam A dinamakan urutan total dalam A. secara spesifik,

Definisi 11.2: Sebuah *urutan total* dalam sebuah himpunan A dengan sifat tambahan bahwa $a < b$, $a = b$ atau $a > b$ untuk sebarang dua elemen a dan b yang merupakan elemen dari A. sebuah himpuna A bersama-sama dengan sebuah urutan total spesifik dalam A dinamakan sebuah *himpunan terurut total* (totally urutred set).

Contoh :

1) Urutan parsial dalam sebarang himpunan A dari bilangan riil (dengan urutan alami) adalah sebuah urutan total karena sebarang dua bilangan adalah bilangan-bilangan yang terbandingkan.
2) Misalkan R adalah urutan parsial dalam V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} yang didefinisikan oleh "x membagi y". Maka R bukanlah sebuah urutan total dalam V karena 3 dan 5 tidak terbandingkan.
3) Misalkan A dan B adalah himpunan berurut total. Maka hasil perkalian Cartesis A x B dapat diurut secara total sebagai berikut:

   $(a, b) < (a', b')$ jika $a < a'$, atau jika $a = a'$ dan $b < b'$ urutan ini dinamakan urutan legsigrafik dari A x B karena urutan tersebut serupa dengan cara pengaturan kata-kata dalam kamus.
4) Misalkan $\{A_i\}_{i\varepsilon I}$ adalah sebuah keluarga yang terurut total (yakni bahwa I terurut total) dari himpunan-himpunan terurut total yang terputus secara sepasang-sepasang.

   Maka gabungan $\cup_{i\in I} A_i$ terurut total (kecuali jika dinyatakan urutan yang lain) sebagai berikut: Misalkan $a, b \in \cup_i\in_I A_i$; maka terdapat $j, k \in I$ sehingga

$a \in A_j$, $b \in A_k$. nah jika $j < k$, maka $a \leq b$; dan jika $j = k$, maka a dan b diurut menurut pengurutan A_j.

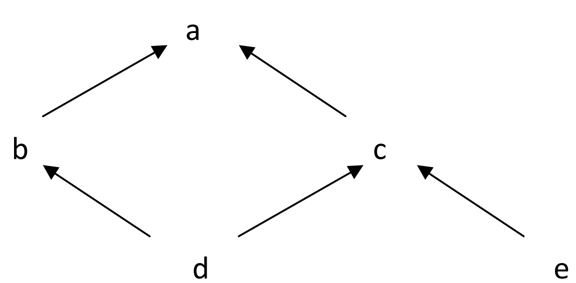
Pada pembahasan ini disepakati bahwa perkataan “urutan” akan seringkali digunakan baik sebagai ganti urutan parsial, maupun urutan total.

11.3 Himpunan Dari Himpunan Terurut

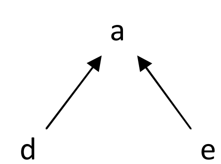
Misalkan sebuah hubungan R mendefinisikan sebuah urutan parsial dalam sebuah himpunan A, yakni misalkan (A, R) adalah sebuah himpunan terurut. Sekarang misalkan B adalah sebuah subset dari A. maka urutan parsial R dalam A akan menginduksi sebuah urutan parsial R’ dalam B dengan cara alami yang berikut: jika $a, b \in B$, maka $(a, b) \in R^1$, yakni , $a \leq b$ sebagai elemen-elemen dari B, jika dan hanya jika $(a, b)\ \varepsilon\ R$, yakni $a \leq b$ sebagai elemen dari A. dalam situasi seperti itu maka himpunan terurut (B, R^1) dinamakan *subset* (terurut parsial) dari himpunan terurut (A, R).

Contoh

1) misalkan W = {a, b, c, d, e} diurut sebagai berikut:

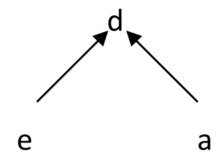


maka V = {a, d, e}, dengan urutan



adalah subset dari himpunan terurut W.

Tetapi V dengan urutan



bukan subset dari himpunan terurut W.

11.4 Subset Terurut Total

Misalkan A adalah sebuah himpunan terurut parsial. Maka seperti yang diperhatikan sebelumnya, urutan parsial dalam A akan menginduksi sebuah urutan parsial dalam tiap-tiap subset dari A. beberapa di antara subset dari A ternyata akan terurut total.

Perhatikan bahwa jika A adalah sebuah subset terurut total, maka tiap-tiap subset dari A juga akan terurut total.

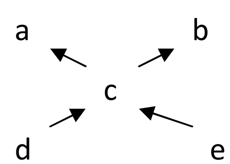
Contoh :

1) Misalkan N, yakni bilangan asli, diurut oleh “x adalah sebuah kelipatan y”, maka N tidak terurut total, karena 4 dan 7 tidak terbandingkan. Tetapi himpunan

$$M = \{2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$$

adalah sebuah subset terurut total dari N.

2) Tinjaulah urut parsial dalam W = {a, b, c, d, e} yang didefinisikan oleh diagram.



Setiap himpunan {a, c, d}, {b, d}, {b, c, e}, {a, c, e} dan {a, c} adalah sebuah subset terurut total. Himpunan {a, b, c} dan {d, a} tidaklah terurut total.

11.5 Elemen Pertama Dan Elemen Terakhir

Misalkan A adalah sebuah himpunan terurut. Elemen, $a \in A$ dinamakan elemen pertama dari A jika, untuk tiap-tiap elemen $x \in A$,

$$a \leq x$$

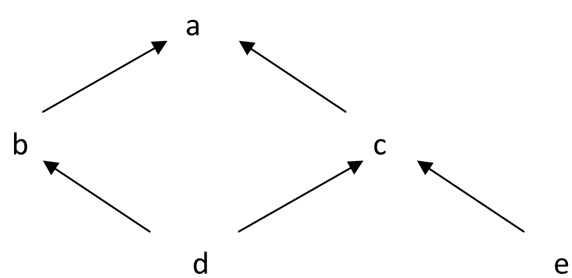
yakni, jika a mendahului setiap elemen dalam A. Analog dengan itu, maka elemen $b \in A$ dinamakan elemen terakhir dari A jika, untuk tiap-tiap $x \in A$.

$$x \leq b$$

yakni, jika b mendominasi setiap elemen yang merupakan elemen A.

Contoh

1) Misalkan W = {a, b, c, d, e} diurut menurut diagram berikut:



   Maka a adalah elemen terakhir dalam W karena a mendominasi tiap-tiap elemen. Perhatikan bahwa W tidak mempunyai elemen pertama. Elemen d bukan elemen pertama karena d tidak mendahului e. Begitu pula sebaliknya elemen e bukan elemen pertama karena e tidak mendahului d.

2) Tinjaulah N, yakni bilangan asli (dengan urut alami). Maka 1 adalah elemen pertama dari N. Tidak ada elemen terakhir N, karena tidak ada elemen $a \in N$ yang mendahului setiap elemen N.

3) Misalkan A adalah sebarang himpunan. Misalkan *A* adalah keluarga subset dari A, yakni himpunan kuasa dari A. Misalkan *A* diurutkan oleh "x adalah subset dari y". Maka himpunan nol adalah elemen pertama dan A adalah elemen terakhir dari *A*.

4) Misalkan $A = \{ x \mid 0 < x < 1\}$ diurut oleh "$x \leq y$". Maka A, yang terurut total, tidak mengandung elemen pertama dan tidak mengandung elemen terakhir.

Teorema 11.2: Sebuah himpunan terurut parsial dapat mempunyai paling banyak satu elemen pertama dan satu elemen terakhir.

Teorema 11.3: Jika a dan b berturut-turut adalah elemen pertama dan elemen terakhir dalam sebuah himpunan terurut parsial A, maka a dan b berturut-turut akan merupakan elemen terakhir dan elemen pertama dalam urutan invers dalam A.

11.6 Elemen Maksimal Dan Elemen Minimal

Misalkan A adalah sebuah himpunan terurut. Sebuah elemen $a \in A$ dinamakan *elemen maksimal* jika

$$a \leq x \text{ menyatakan } a = x$$

dengan kata lain a adalah elemen maksimal jika tidak ada elemen dalam A yang secara seksama mendominasi a.

Demikian juga, sebuah elemen $b \in A$ dinamakan elemen minimal jika

$$x \leq b \text{ menyatakan } b = x$$

yakni, jika tidak ada elemen dalam A yang secara seksama mendahului b.

1) Misalkan W = {a, b, c, d, e} diurut menurut diagram 11.6 dengan cara biasa:kedua-duanya d dan e adalah elemen minimal karena tidak ada elemen dalam W yang secara seksama mendahului yang mana pun dari kedua elemen tersebut. Elemen a adalah elemen maksimal.

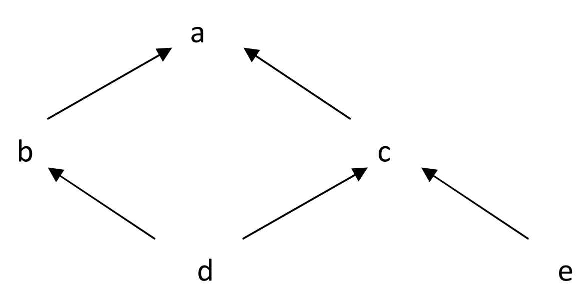
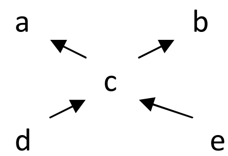


Diagram 11.6

2) Misalkan W = {a, b, c, d, e} diurut menurut diagram berikut:



Maka a dan b adalah elemen-elemen maksimal, dan c dan d adalah elemen-elemen minimal. Perhatikan bahwa W tidak mempunyai elemen pertama dan tidak mempunyai elemen terakhir.

3) Misalkan V = { x | 0 < x < 1}. Maka V tidak mempunyai elemen maskimal dan tidak mempunyai elemen minimal.

Teorema berikut memperlihatkan hubungan-hubungan di antara konsep-konsep kita terdahulu. Di sini A adalah sebuah himpunan terurut parsial.

Teorema 11.4: Jika a adalah sebuah elemen pertama dalam A, maka a adalah sebuah elemen minimal dalam A dan a adalah satu-satunya elemen minimal.

Teorema 11.5 Jika a adalah sebuah elemen terakhir dalam A maka a sebuah elemen maksimal dan satu-satunya elemen maksimal dalam A.

Teorema 11.6:Jika A terurut total, maka A dapat engandung paling banyak satu elemen minimal yang akan merupakan elemen pertama.

Teorema 11.7: Jika A terurut total, maka A dapat mengandung paling banyak satu elemen maksimal yang akan merupakan elemen terakhir.

Teorema 11.8: Tiap-tiap himpunan terurut parsial yang berhingga mempunyai paling sedikit satu elemen maksimal dan paling sedikit satu elemen minimal.

Teorema 11.9: Sebuah himpunan terurut tak berhingga, tidak perlu mempunyai suatu elemen maksimal maupun suatu elemen minimal, walaupun himpunan tersebut terurut total.

Contoh:

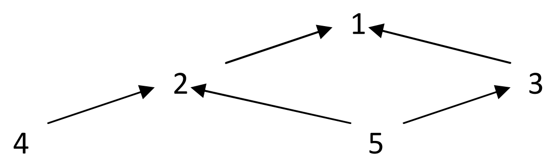
1) Misalkan A = { 2, 3, 4, 5, …} diurut oleh “x membagi y”. (a) Carilah semua elemen minimal. (b) Carilah semua elemen maksimal.

   Penyelesaian :

a. Jika p adalah sebuah bilangan prima, maka hanya p membagi p (karena 1 $\notin$ A); maka semua bilangan prima adalah elemen minimal. Selanjutnya, jika a $\in$ A bukan prima, maka ada sebuah bilangan b $\in$ A sehingga b membagi a, yakni b $\leq$ a, dan b $\neq$ a. Maka hanya bilangan primalah yang merupakan elemen minimal.

b. Tidak ada elemen maksimal karena, untuk tiap-tiap a $\in$ A, maka a membagi, khususnya, 2a

2) Misalkan B = {1, 2, 3, 4, 5} diurutkan sebagai berikut



(a) Carilah semua elemen minimal, (b) Carilah semua elemen maksimal, (c) Apakah b mempunyai elemen pertama? (d) Apakah B mempunyai elemen terakhir?

Penyelesaian:

a. Tidak ada elemen yang secara seksama mendahului 4 atau 5; maka 4 dan 5 adalah elemen minimal.

b. Satu-satunya elemen maksimal adalah 1

c. Tidak ada elemen pertama. Perhatikan bahwa 5 bukanlah sebuah elemen pertama karena 5 tidak mendahului 4.

d. Bilangan 1 adalah sebuah elemen terakhir karena bilangan tersebut mendominasi tiap-tiap elemen dalam B.

3) Buktikan: misalkan a dan b adalah elemen minimal dalam sebuah himpunan A yang terurut total; maka a = b.

Penyelesaian:

Elemen a dan elemen b terbandingkan karena A terurut total; maka a $\leq$ b atau b $\geq$ a. Karena b adalah sebuah elemen minimal, maka a $\leq$ b menyatakan a = b; dan karena a sebuah elemen minimal, maka b $\leq$ a menyatakan a = b. Dalam kasus manapun, a = b.

4) Misalkan B = {2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10} diurut oleh "x adalah sebuah kelipatan dari y". (1) Carilah semua elemen maksimal dari B. (2) Carilah semua elemen minimal dari B. (3) Apakah B mempunyai elemen pertama atau elemen terakhir?

   Penyelesaian:

   Pertama-tama bentuklah sebuah diagram dari B sebagai berikut:

   (1) Elemen-elemen maksimal adalah 3, 2 dan 5.

   (2) Elemen-elemen minimal adalah 9, 6, 8 dan 10.

   (3) Tidak ada elemen pertama dan tidak ada elemen terakhir.

11.7 Batas Atas Dan Batas Bawah

Misalkan B adalah sebuah subset dari sebuah himpunan terurut parsial A. sebuah elemen m dalam A dinamakan sebuah *batas bawah* (lower bound) dari B, jika, untuk tiap-tiap x $\in$ B,

$$m \leq x$$

yakni, m mendahului tiap-tiap elemen dalam B. Jika sebuah batas bawah dari B mendominasi tiap-tiap batas bawah yang lainnya dari B, maka batas bawah tersebut dinamakan batas bawah terbesar (g.l.b = greatest lower bound) atau *infimum* dari B dan dinyatakan oleh "inf (B)".

Secara umum B dapat mempunyai, satu atau banyak, atau tidak ada batas bawah, tetapi paling banyak ada satu inf (B).

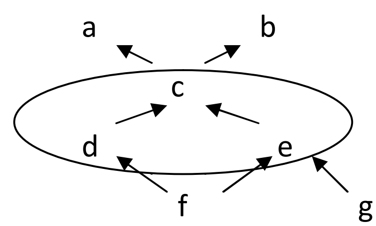
Demikian juga, sebuah elemen u dalam A dinamakan sebuah *batas atas* (upper bound) dari B jika u mendominasi tiap-tiap elemen dalam B, yakni jika, untuk tiap-tiap x $\in$ B,

$$x \leq m$$

Jika sebuah batas atas dari B mendahului setiap batas atas yang lainnya dari B, maka batas atas tersebut dinamakan *batas atas terkecil* (l.u.b = least upper bound) atau *supremum* dari B dan dinyatakan oleh "Sup (B)". Paling banyak terdapat satu sup (B).

Contoh:

1) Misalkan V = {a, b, c, d, e, f, g} diurut menurut diagram berikut:



   Misalkan B = {c, d, e}. Maka a, b dan c adalah batas atas dari B, dan f adalah satu-satunya batas bawah dari B. Perhatikan g bukan batas bawah dari B karena g tidak mendahului d; g dan d tidak terbandingkan. Lagi pula, c = sup (B) adalah elemen dari B, sedangkan f = inf (B) tidak merupakan elemen dari B.

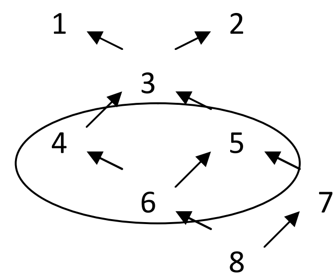
2) Misalkan A adalah sebarang himpunan terbatas dari bilangan riil. Maka sebuah teorema fundamental tentang bilangan riil menyatakan bahwa (dalam pengurutan alami dari R) inf (A) dan sup (A) ada.

3) Misalkan Q adalah himpunan bilangan rasional.

   Misalkan $B = \{ x \mid x \in Q, 2 < x^2 < 3\}$

   Yakni, B terdiri dari bilangan-bilangan rasional yang terletak diantara $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$ pada garis riil. Maka B mempunyai sejumlah tak berhingga batas atas dan batas bawah, tetapi inf (B) dan sup (B) tidak ada. Dengan kata lain, B tidak mempunyai batas atas terkecil dan tidak mempunyai batas bawah terbesar. Perhatikan bahwa bilangan riil $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$ tidak merupakan elemen dari Q dan tidak dapat dianggap sebagai batas atas dan batas bawah dari B. Kelak di pokok bahasan analis akan dikatakan bahwa Q tidak lengkap.

4) Misalkan W = {1, 2, …, 7, 8} diurut sebagai berikut:



Tinjaulah subset V = {4, 5, 6} dari W. (1) Carilah Himpunan batas atas dari V. (2) Carilah himpunan batas bawah dari V. (3) Apakah inf (V) ada ?

Penyelesaian:

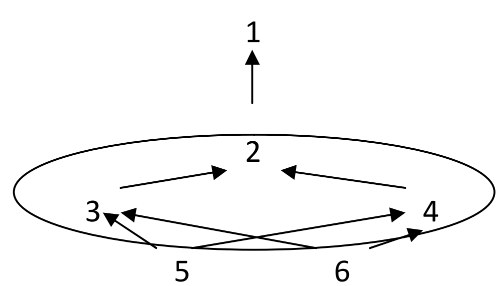
(1) Setiap elemen dalam {1, 2, 3}, dan hanya elemen-elemen ini, yang mendominasi tiap-tiap elemen dalam V sehingga {1, 2, 3} adalah sebuah himpunan batas atas.

(2) Hanya 6 dan 8 yang mendahului tiap-tiap elemen dalam V; maka {6, 8} adlah himpunan batas bawah. Perhatikan bahwa 7 bukanlah sebuah batas bawah karena 7 tidak menahului 4 atau 6.

(3) Karena 3 adalah sebuah elemen pertama dalam himpunan batas atas dari V, maka sup (V) = 3. Perhatikan bahwa 3 tidak merupakan elemen dari V.

(4) Karena 6 adalah sebuah elemen terakhir dalam himpunan batas bawah dari V, maka inf (V) = 6. perhatikan disini bahwa 6 tidak merupakan elemen V.

5) Misalkan D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} diurut sebagai berikut:



Tinjaulah subset E = {2, 3, 4} dari D. (1) Carilah himpunan batas atas dari E. (2) Carilah himpunan batas bawah dari E. (3) Apakah sup (E) ada ? (4) Apakah inf (E) ada ?

Penyelesaian:

(1) Kedua-duanya 1 dan 2, dan tidak ada elemen lainnya, mendominasi tiap-tiap bilangan dalam E; maka {1, 2} adalah himpunan batas atas dari E.

(2) Kedua-duanya 5 dan 6, dan tidak ada bilangan lain, mendahului tiap-tiap bilangan dalam E; maka {6, 5} adalah himpunan batas bawah dari E.

(3) Karena 2 adalah sebuah elemen pertama dalam {1, 2}, yakni himpunan batas atas dari E, maka sup (E) = 2.

(4) Karena {5, 6}, yakni himpuna batas bawah dari E, tidak mempunyai elemen terakhir, maka inf (E) tidak ada.

6) Tinjaulah Q, yakni himpunan bilangan rasional, dan subsetnya

$$A = \{ x \mid x \in Q, x^2 < 3\}.$$

(1) Apakah A terbatas di atas, yakni apakah A mempunyai sebuah batas atas?

(2) Apakah A terbatas di bawah, yakni apakah A mempunyai sebuah batas bawah?

(3) Apakah sup (A) ada?

(4) Apakah inf (A) ada?

Penyelesaian:

c. A terbatas di atas karena, misalnya, 50 adalah sebuah batas atas.

d. Tidak ada batas bawah dari A; maka A tidak terbatas di bawah.

e. Sup (A) tidak ada. Dengan meninjau A sebagai sebuah subset dari R, yakni bilangan riil, maka $\sqrt[3]{3}$ akan merupakan batas atas terkecil dari A; tetapi sebagai sebuah subset dari Q, maka sup (A) tidak ada.

f. Inf (A) tidak ada karena himpunan batas bawah adalah himpunan kosong.

7) Misalkan *A* adalah keluarga himpunan yang terurut parsial menurut pembebtukan himpunan misalkan ***B*** = $\{A_i\}_{I\ \varepsilon I}$ adalah sebuah subset dari ***A***.

   (1) Buktikan bahwa jika **B** $\in$ **A** adalah sebuah batas atas dari **B**, maka ($\cup_{I\ \varepsilon I}$ A_i) $\subset$ B.

   (2) Apakah $\cup_{I\ \varepsilon I}$ A_i sebuah batas dari **B**?

   Penyelesaian :

   (1) Misalkan x adalah elemen dari $\cup_{I\ \varepsilon I}$ A_i Maka terdapat sebuah A_j, dimana j $\in$ I, sehingga x $\in$ A_j. Karena B adalah sebuah batas atas, maka $A_j \subset$ B; maka x adalah elemen dari B.

   Karena x $\in$ $\cup_{i\varepsilon I}$ A_i menyatakan x $\in$ B, maka ($\cup_{I\ \varepsilon I}$ A_i) $\subset$ B.

   (2) Walaupun $\{A_i\}_{I\ \varepsilon I}$ adalah sebuah subkeluarga dari A, maka tidaklah perlu benar bahwa gabungan $\cup_{I\ \varepsilon I}$ A_i adalah sebuah elemen dalam ***A***. Maka $\cup_{i\varepsilon I}$ A_i adalah sebuah batas atas dari B jika, dan hanya jika $\cup_{I\ \varepsilon I}$ A_i adalah elemen dari A.

8) Misalkan N, yakni bilangan asli di urutkan oleh “x membagi y”, dan misalkan A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ adalah sebuah subset berhingga dari N. (1) Apakah inf (A) ada? (2) Apakah sub (A) ada?

   Penyelesaian:

   (1) Pembagi persekutuan terbesar dari elemen-elemen dalam A adalah inf (A) dan selalu ada.

   (2) Kelipatan persekutuan terkecil dari elemen-elemen dalam A adalah sup (A) dan selalu ada.

11.8 Himpunan-Himpunan Serupa

Dua himpunan terurut dikatakan serupa jika terdapat sebuah bijektif di antara elemen-elemen yang mempertahankan hubungan urutan tersebut. Secara spesifik, Definisi 11.3: Sebuah himpunan terurut A serupa dengan sebuahhimpunan terurut B, yang dinyatakan oleh

$$A \approx B$$

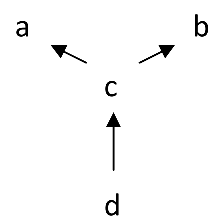
Jika terdapat sebuah fungsi ƒ : A → B yang bijektif dan mempunyai sifat bahwa, untuk sebarang elemen a, $a^1 \varepsilon A$,

$$a < a^1 \text{ jika dan hanya jika } f(a) < f(a^1)$$

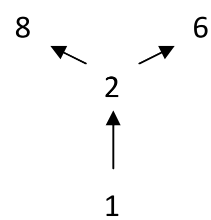
fungsi ƒ dinamakan pemetaan keserupaan dari A ke dalam B.

Contoh :

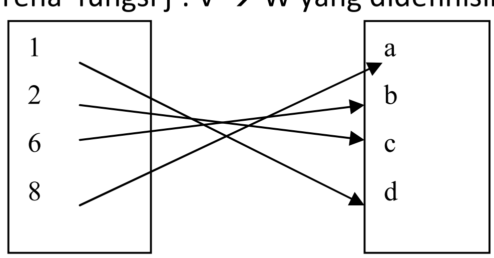
1) Misalkan V = {1, 2, 6, 8} diurut oleh “x membagi y”, dan misalkan W = {a, b, c, d} diurut menurut diagram berikut:



Perhatikan bahwa sebuah diagram V adalah sebagai berikut:



maka V ≈ W karena fungsi ƒ : V → W yang didefinisikan oleh



adalah sebuah pemetaan keserupaan dari V ke dalam W, yakni fungsi tersebut menghasilkan sebuah bijektif diantara elemen-elemen yang mempertahankan hubungan urutan tersebut. Perhatikan g = {(1, d), (2, c), (6, a), (8, b)} adalah juga sebuah pemetaan keserupaan dari V ke dalam W.

2) Tinjaulah bilangan asli N = {1, 2, …} dan bilangan bulat negatif
   M = {-1, -2, …}, yang masing-masing diurut menurut urut alami "$x \leq y$". Maka V tidak serupa dengan M. karena jika $f : N \rightarrow M$ adalah sebuah pemetaan keserupaan maka, untuk setiap $a \in N$,
   $1 \leq a$ harus menyatakan $f(1) \leq f(a)$ untuk tiap-tiap $f(a) \in M$. Karena M tidak mempunyai elemen pertama, maka f tidak mengawetkan urutan yang ada.
3) Bilangan asli N = {1, 2, 3, …} serupa dengan bilangan genap
   E = {2, 4, 6, …} karena fungsi $f : N \rightarrow E$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x$ adalah sebuah keserupaan dari N ke dalam E.

Teorema–teorema berikut diperoleh langsung dari definisi himpunan-himpunan serupa.

Teorema 11.10: Jika A terurut total dan $B \approx A$, maka B terurut total.

Teorema 11.11: Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah pemetaan keserupaan. Maka $a \in A$ adalah sebuah elemen pertama (terakhir, minimal atau maksimal) jika dan hanya jika $f(a)$ adalah sebuah elemen pertama (terakhir, minimal atau maksimal) dari B.

Teorema 11.12: Jika A serupa dengan B maka, khususnya, A ekuivalen dengan B.

Teorema berikutnya akan memainkan bagian penting dalam teori selanjutnya.

Teorema 11.13: Hubungan dalam himpunan terurut yang didefinisikan oleh $A \approx B$ adalah sebuah hubungan kesetaraan yakni,

(1) $A \approx A$ untuk sebarang himpunan terurut A

(2) Jika $A \approx B$, maka $B \approx A$

(3) Jika $A \approx B$ dan $B \approx C$, maka $A \approx C$

Teorema 11.14: Syarat dalam definisi 11.8.1 bahwa $a < a^1$ jika dan hanya jika $f(a) < f(a^1)$ ekuivalen dengan kedua syarat berikut:

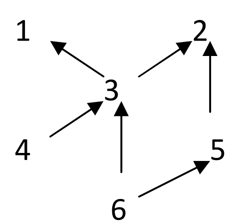
(1) $a < a^1$ menyatakan $f(a)<f(a^1)$; (maka $a>a^1$ menyatakan $f(a) >f(a^1)$)

(2) $a \,||\, a^1$ (tak terbandingkan) menyatakan $f(a) \,||\, f(a^1)$.

Maka, jika himpunan-himpunan tersebut terurut total, hanya (1) di atas yang perlu.

11.9 Latihan

1) Himpunan dalam N, yakni bilangan asli, yang didefinisikan oleh "x adalah sebuah kelipatan y" adalah sebuah urutan parsial.
   (1) Sisipkanlah simbol yang betul, $<$, $>$, atau $||$ (tidak terbandingkan) di antara setiap pasangan elemen:
   (a) 3.....7 (b) 2......8 (c) 6......1 (d) 3 33
   (2) Nyatakanlah apakah setiap subset dari N yang berikut terurut total atau tidak:
   (a) {8, 2, 24} (b) {5} (c) {5, 1, 9} (d) {2, 4, 8, 24}
   (e) {2, 4, 6, 8, …} (f) {15, 3, 9)
2) Misalkan W = {1, 2, 3, 4, 5, 6} diurut sebagai berikut:



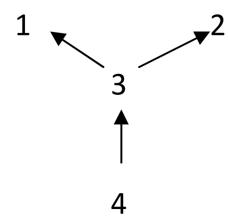
   (1) Sisipkanlah simbol yang betul $<$, $>$, atau $||$ (tidak terbandingkan) di antara setiap pasangan elemen:
   (a) 1…6 (b) 4 … 5 (c) 5 … 1 (d) 4 … 2
   (2) Bentuklah sebuah diagram dari elemen-elemen dalam W yang mendifinisikan urut sebaliknya.
   (3) Carilah semua subset terurut total dari W, yang masing-masing mengadung paling sedikit tiga elemen.

(4) Carilah semua subset terurut total dari W dengan urut sebaliknya, yang masing-masing mengadung paling sedikit tiga elemen.

3) Misalkan A = (N, $\leq$), yakni bilangan asli dengan urut alami, misalkan B = (N, $\geq$), yakni bilangan asli dengan urut sebaliknya, dan misalkan A x B diurut secara leksikografik. Sisipkanlah simbol yang betul, < atau >, di antara setiap pasangan elemen dari A x B yang berikut.

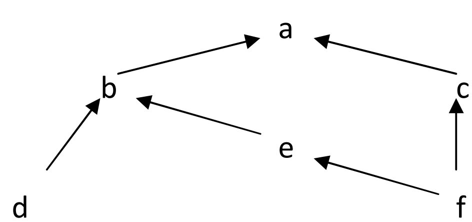
(a) (1, 3) … 1,5), (b) (4, 1) … (2, 18) (c) (4, 30) … (4, 4) (d) (2, 2) … (15, 15)

4) Misalkan D = {1, 2, 3, 4} diurut berikut:



Misalkan B adalah keluarga semua subset dari D yang terurut total yang tak kosong, yang diurut, menurut notasi pembentuk himpunan. Bentuklah sebuah diagram dari B.

5) Misalkan B = {a, b, c, d,e, f} diurut sebagai berikut:



(1) (a) Carilah semua elemen minimal dari B.

(b) Carilah semua elemen maksimal dari B

(c) Apakah B mempunyai sebuah elemen pertama?

(d) Apakah B mempunyai sebuah elemen terakhir?

(2) Misalkan B adalah keluarga semua subset terurut total yang tak kosong, dan misalkan B diurut menurut pemasukan himpunan.

(a) Carilah semua elemen maksimal dari B

(b) Carilah semua elemen minimal dari B

(c) Apakah B mempunyai sebuah elemen pertama?

(d) Apakah B mempunyai sebuah elemen terakhir?

6) Misalkan M = {2, 3, 4, …} dan misalkan M x M diurut sebagai berikut:

   (a, b) $\leq$ (c, d) jika a membagi c dan jika b lebih kecil daripada atau sama dengan d.

   (1) Carilah semua elemen minimal.

   (2) Carilah semua elemen maksimal

7) Misalkan M = {2, 3, 4, …} diurut oleh “x membagi y”. selanjutnya, misalkan M adalah keluarga semua subset dari M yang terurut total dan tak kosong dan misalnya M terurut parsial menurut pemasukan himpunan.

   (1) Carilah semua elemen minimal dari M.

   (2) Carilah semua elemen maksimal dari M.

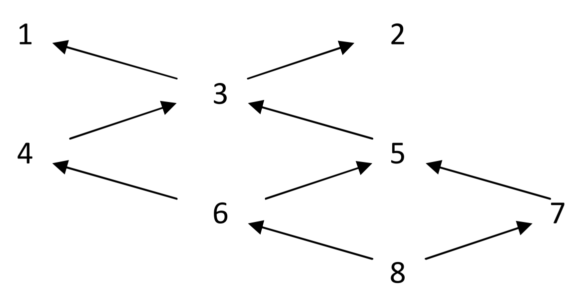
8) Nyatakan apakah setiap pernyataan berikut benar atau palsu dan, jika palsu, berikanlah contoh balasan.

   (1) Jika sebuah himpunan terurut parsial A hanya mempunyai satu elemen maksimal a, maka a adalah juga sebuah elemen terakhir.

   (2) Jika sebuah himpunan terurut parsial A yang berhingga hanya mempunyai satu elemen maksimal a, maka a adalah juga sebuah elemen terakhir.

   (3) Jika sebuah himpunan terurut total A hanya mempunyai satu elemen maksimal a, maka a adalah juga sebuah elemen terakhir.

9) Misalkan W = [1, 2, …, 7, 8} diurut sebagai berikut:



   (1) Tinjaulah subset A = {4, 5, 7} dari W.

(a) Carilah himpunan batas atas dari A

(b) Carilah himpunan batas bawah dari A

(c) Apakah sup (A) ada?

(d) Apakah inf (A) ada?

(2) Tinjaulah subset B = {2, 3, 6} dari W.

(a) Carilah himpunan batas atas dari B

(b) Carilah himpunan batas bawah dari B

(c) Apakah sup (B) ada?

(d) Apakah inf (B) ada?

(3) Tinjaulah subset C = (1, 2, 4, 7} dari W

(a) Carilah himpunan batas atas dari C

(b) Carilah himpunan batas bawah dari C

(c) Apakah sup (C) ada?

(d) Apakah inf (C) ada?

10) Tinjaulah Q, yakni himpunan bilanan rasional dengan urutan alami, dan subsetnya A:

$A = \{ x \mid x \in Q, 8 < x^2 < 15\}$

(1) Apakah A terbatas di atas? (2) Apakah A terbatas di bawah? (3) Apakah sup (A) ada? (4) Apakah inf (A) ada ?

Bab XII
AKSIOMA DAN PARADOKS DALAM TEORI HIMPUNAN

12.1 Pendahuluan

Teori himpunan pertama–tama dipelajari sebagai sebuah disiplin matematik oleh Cantor (1845–1918) pada akhir abad kesembilan belas. Sekarang ini, teori himpunan terletak pada dasar matematika dan telah mengubah hampir tiap–tiap cabang matematika. Pada kira–kira waktu yang bersamaan ketika teori himpunan mulai mempengaruhi cabang–cabang metematika yang lain, maka berbagai kontradiksi, yang dinamakan paradoks, ditemukan untuk pertama kali oleh Burali–Forti dalam tahun 1897. Dalam bab ini, beberapa dari paradoks ini akan disajikan. Walaupun kita mungkin untuk mengeleminasi kontradiksi yang dikenal ini dengan sebuah pengembangan aksiomatik yang seksama dari teori himpunan, namun masih banyak pertanyaan yang tidak terjawab. Berikutnya juga disajikan sebuah aksioma Zermelo-Fraenkel yang akan mendasari pengembangan dari teori himpunan. Ernst Zermelo (1908) mencoba mengetengahkan teori himpunan dengan sistem aksioma formal, serta disempurnakan oleh Abraham Fraenkel (1922) dengan aksioma 10 *Axiom of Choice*.

12.2 Himpunan Semua Himpunan (Paradoks Cantor)

Misalkan A adalah himpunan semua himpunan. Maka tiap–tiap subset dari A adalah juga anggota dari A, maka kuasa himpunan dari A adalah sebuah subset dari A, yakni,

$$2^A \subset A$$

Tetapi $2^A \subset A$ menyatakan bahwa

$$\#(2^A) \leq \#(A)$$

Akan tetapi, menurut teorema Cantor

$$\#(A) < \#(2^A)$$

Jadi konsep himpunan semua himpunan yang menuju ke sebuah kontradiksi.

12.3 Paradoks Russel

Misalkan Z adalah himpunan semua himpunan yang tidak mengandung dirinya sendiri sebagai anggota, yakni $Z = \{X \mid X \notin X\}$

Apakah Z merupakan elemennya sendiri atau tidak? Jika Z tidak merupakan elemen dari Z maka, menurut definisi Z, maka Z adalah elemennya sendiri. Lagi pula, jika Z adalah elemen dari Z maka menurut definisi Z, maka Z bukan merupakan elemennya sendiri. Dalam kasus yang mana pun maka kita sampai ke sebuah kontradiksi.

Paradoks di atas agak analog dengan paradoks populer yang berikut: Dalam sebuah kota tertentu, ada seorang tukang pangkas yang hanya mencukur semua orang yang tidak mencukur dirinya sendiri. Siapa mencukur tukang pangkas tersebut?

12.4 Himpunan Semua Bilangan Ordinal (Paradoks Burali–Forti)

Misalkan Δ adalah himpunan semua bilangan ordinal. Menurut teorema sebelumya maka Δ adalah sebuah himpunan terurut baik, katakan α = ord (Δ). Sekarang tinjaulah s (α), yakni himpunan semua bilangan ordinal yang lebih kecil daripada α. Perhatikan :

1. karena s (α) terdiri dari semua elemen dalam Δ yang mendahului α, maka s (α) adalah sebuah segmen permulaan dari Δ.
2. Menurut teorema sebelumnya α = ord s (α); maka

   $\text{Ord}(S(\alpha)) = \alpha = \text{ord}(\Delta)$

   Maka Δ serupa dengan salah satu segmen permulaannya. Jadi konsep semua bilangan ordinal akan menuju ke sebuah kontradiksi.

12.5 Keluarga Semua Himpunan Yang Serupa Dengan Sebuah Himpunan Terurut Baik.

Misalkan A adalah sebarang himpunan terurut baik. Maka himpunan A_i, yang didefinisikan seperti diatas dan diurut menurut

$(a,i) \leq (b,i)$ jika $a \leq b$

adalah himpunan terurut baik dan yang serupa dengan A, yakni $A_i \cong A$.

Sekarang misalkan λ adalah keluarga semua himpunan yang serupa dengan himpunan terurut baik A. Tinjaulah himpunan kuasa 2^λ dari λ, dan definisikan keluarga himpunan $\{A_i\}_{i\in 2^\lambda}$ seperti di atas. Karena setiap himpunan A_i serupa dengan A, maka

$\{A_i\}_{i\in 2^\lambda} \subset \lambda$ maka $\#(2^\lambda) = \#(\{A_i\}_{i\in 2^\lambda}) \leq \#(\lambda)$

karena, menurut Teorema Cantor, $\#(\lambda) < \#(2^\lambda)$, maka konsep keluarga semua himpunan yang serupa dengan sebuah himpunan terurut baik (definisi kita mengenai bilangan kardinal) akan menuju ke sebuah kontradiksi.

12.6 Aksioma Zermelo-Fraenkel

Aksioma ini menganggap himpunan dan anggota sebagai konsep primitif. Jika dalam bab sebelumnya x dan {x} dianggap tidak sama maka dalam bab ini x dan {x} dipandang sebagai himpunan.

Aksioma 1 (aksioma ekstensi)

Dua himpunan adalah sama jika dan hanya jika mereka memiliki elemen yang sama.

Aksioma 2 (aksioma himpunan kosong)

Terdapat himpunan yang tidak memiliki anggota, dan dinyatakan dengan $\varnothing$.

Aksioma 3 (Aksioma pasangan)

Diberikan sebarang himpunan x, dan y, terdapat himpunan yang anggotanya adalah x dan y.

Aksioma 4 (aksioma gabungan)

Diberikan sebarang himpunan x, gabungan dari semua anggota x adalah suatu himpunan.

Aksioma 5 (aksioma himpunan kuasa)

Diberikan sebarang himpunan x, terdapat himpunan yang memuat semua subset dari x.

Kelima aksioma di atas telah dikenal sebagai sifat-sifat pada himpunan. Dengan menggunakan aksioma 3 dari bentuk {x,y} jika diambil x=y dapat berbentuk {x} yang merupakan himpunan sigleton. Pasangan {x,y} tidak terurut tetapi (x,y) merupakan pasangan terurut. Seperti yang telah digunakan pada definisi 9.1.

Aksioma 6 (aksioma pemisahan)

Diberikan sebarang himpunan x dan sebarang kalimat p(y) adalah pernyataan untuk semua $y \in x$, maka ada himpunan $\{y \in x /\ p(y)$ adalah benar$\}$.

Seperti telah ditunjukkan bahwa aksioma 6 ini dikonter oleh paradoks Russel. Bukan dalam kasus ini, karena himpunan dikontruksi dari subset x.

Lihat apa yang terjadi misalkan,

$b = \{ y \in x /\ y \notin y \}$

Maka dalam kasus ini untuk $w \in b$, haruslah $w \notin w$. Misalkan anggaplah $b \in b$ berarti $b \in x$ dan $b \notin b$ ini kontradiksi. Sekarang anggap $b \notin b$. Jika $b \in x$ maka memenuhi definisi di atas, dan untuk anggota b dan $b \in b$ kontradiksi. Tetapi mungkin $b \notin x$ masih berlaku. Jadi akan sampai pada dilema paradoks Russel, disederhanakan dengan mengkonklusikan bahwa $b \notin x$ tidak masalah.

Kelebihan aksioma 6 ini memungkinkan dibentuknya irisan dua himpunan. Jika z adalah himpunan dan misalkan p(y) fungsi pernyataan "$y \in z$" maka $\{y \in x /\ y \in z\}$ adalah $x \cap z$.

Aksioma 7 (aksioma pengganti)

Diberikan sebarang himpunan x dan sebarang funsi f yang didefinisikan pada x, bayangan f(x) adalah himpunan.

Aksioma 7 ini mengimplikasikan aksioma 6, karena aksioma 7 ini merupakan metode untuk mendefinisikan himpunan atau menuliskan himpunan dengan cara mendeskripsikan sifat-sifat yang dimiliki anggotanya. Aksioma 6 asli disampaikan oleh Zermelo dan aksioma 7 ini perbaikan dari Fraenkel.

Aksioma 8 (aksioma ketakhinggaan) terdapat himpuna x sedemikian hingga $\emptyset \in x$, dan bila $y \in x$ berlakulah bahwa $y \cup \{y\} \in x$.

Aksioma ini kelihatan agak aneh, tetapi menjamin eksistensi himpunan takhinnga. Sesungguhnya, aksioma ini secara khusus menunjukkan himpunan yang memuat,

$\emptyset$, $\emptyset \cup \{\emptyset\}$, $\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$, …

dan seterusnya semua elemen adalah berbeda satu sama lain, sehingga telah terbentuk himpunan takhingga.

Aksioma 9 (aksioma keteraturan)

Diberikan sebarang himpunan tak kosong x, terdapat himpunan y sedemikian hingga $y \cap x = \emptyset$.

Aksioma 9 ini memberikan efek menghindarkan kemungkinan suatu himpunan beranggota himpunan itu sendiri. Pandanglah $x \in x$, sekarang himpunan $\{x\}$ tidak kosong karena memuat x. Dengan aksioma keteraturan ini terdapat $y \in \{x\}$ sedemikian hingga $y \cap \{x\} = \emptyset$. Karena $y \in \{x\}$ haruslah $y = x$. tetapi $y \in y$ dan $y \in \{x\}$, juga $y \in y \cap \{x\}$, kontradiksi.

Aksioma 10 (aksioma pilihan)

Diberikan sebarang himpunan x yang anggotanya himpunan yang tidak kosong dan saling lepas, terdapat himpunan y yang memuat tepat satu elemen dari setiap himpunan anggota x.

Demikian telah diberikan beberapa contoh pengembangan teori himpunan secara aksiomatik dan beberapa paradoks yang mengkonter keberadaan aksioma tersebut

12.7 Latihan

1. Misalkan S dan T himpunan yang tak kosong. Buktikan bahwa $\#(T) \leq \#S$ jika dan hanya jika ada fungsi surjektif $f: S \rightarrow T$.
2. Tanpa memnggunakan aksioma keteraturan, tunjukkan bahwa $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ dan konklusikan bahwa $\emptyset \neq \emptyset \cup \{\emptyset\}$.
3. Misalkan x suatu himpunan, tunjukkan bahwa $\{y/\ x \subseteq y\}$ bukan himpunan.
4. Dengan menggunakan aksioma keteraturan tunjukkan bahwa untuk sebarang himpunan x, $x \cup \{x\} \neq x$.
5. Dengan menggunakan aksioma keteraturan tunjukkan bahwa jika $x \in y$ maka $y \notin x$.
6. Dengan menggunakan aksioma keteraturan tunjukkan bahwa: tidak ada tiga himpunan x, y dan z sedemikian hingga $x \in y$, $y \in z$ dan $z \in x$.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle R. G. and Sherbert D. R. (1991). *Introduction to Real Analysis,* New York: John Wiley & Sons.

Beagle, E. G. (1979). *Critical Variables In Mathematics Education*. Mathematical Association of America & NCTM. Washington, D. C.

Bell, F. M. (1981). *Teaching and Learning Mathematics (in Secondary Schools).* Wm. C. Brown Company Publishers. Iowa.

Dajono, Slamet, (1977) *Konsep Umum Matematika*, Badan Koordinasi Basic Natural Sciences Unair, Surabaya.

Seymour, L., (1964) *Set Theory and Related Topics,* Schaum Publishing Co. Singapore.

Seymour, L., (1981) *Theory and Problem of General Topologi,* Schaum's Outline Series, Singapore.

Soedjadi, R, (1994) *Dasar Matematika, Hand Out,* PPS IKIP Surabaya, Surabaya.

Susanto, B, 1990, *Geometri Transformasi,* FPMIPA UGM, Yogyakarta.

Steven R., Lay, (1986) *Analysis An Introduction to Proof,* New Jersey: Prentice-Hall.

Stoll, Robert R, (1961) *Sets, Logic and Axiomatic Theories,* WH Freman, San Fransisco.

Theresia, MHT, (1989) *Pengantar Dasar Matematika*, University Press IKIP Surabaya.

Widodo, S, 1999, *Barisan Bilangan Fibonacci,* PPS IKIP Surabaya, Surabaya.

YAYASAN PEMBINA LEMBAGA PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI PGRI KEDIRI

UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI

PROGRAM PASCASARJANA

Status "Terakreditasi"

SK. BAN PT No: 718/SK/BAN-PT/Akred/PT/VII/2015 Tanggal 10 Juli 2015

Jl. K.H. Achmad Dahlan No. 76 Telp : (0354) 771576, 771503, 771495 Kediri

SURAT TUGAS

Nomor: 030/A/PPs-UN PGRI Kd/III/2019

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dr. Rr. Forijati, M.M

NIDN : 0028016701

Jabatan : Direktur Pascasarjana

menugaskan kepada:

Nama : Dr. Suryo Widodo, M.Pd.

NIDN : 0002026403

Jabatan : Dosen

Prodi : Magister Keguruan Olahraga

Untuk melaksanakan kegiatan pengajuan pembuatan Hak Cipta buku ajar dengan judul: "**Pengantar Dasar Matematika**".

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dilaksanakan dengan penuh tanggung jawab. Atas perhatian dan kerjasamanya disampaikan terimakasih.

Kediri, 4 Maret 2019

Direktur PPs,

Dr. Rr. Forijati, M.M

REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201932352, 11 Maret 2019
Pencipta		
Nama	:	**Dr. Suryo Widodo, M.Pd, Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd,**
Alamat	:	Dusun Kerep RT/RW : 004/001 Desa Kerep, Kecamatan Tarokan, , Kabupaten Kediri, Jawa Timur, 64152
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Universitas Nusantara PGRI Kediri**
Alamat	:	Jl. KH. Achmad Dahlan No 76 Mojoroto,, Kota Kediri, Jawa Timur, 64112
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Pengantar Dasar Matematika**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	5 Mei 2017, di Kota Kediri
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak Ciptaan tersebut pertama kali dilakukan Pengumuman.
Nomor pencatatan	:	000137085

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

LAMPIRAN PENCIPTA

No	Nama	Alamat
1	Dr. Suryo Widodo, M.Pd	Dusun Kerep RT/RW : 004/001 Desa Kerep, Kecamatan Tarokan,
2	Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd	Dusun Kerep RT/RW : 004/001 Desa Kerep, Kecamatan Tarokan,