REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN

CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00202009947, 12 Maret 2020
Pencipta		
Nama	:	**Dr. Suryo Widodo, M.Pd, Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd,**
Alamat	:	Dusun Kerep, RT/RW: 004/001, Desa Kerep, Kecamatan Tarokan, Kabupaten Kediri, Jawa Timur, 64152
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Universitas Nusantara PGRI Kediri**
Alamat	:	Jl. K.H. Ahmad Dahlan No. 76 Kecamatan Mojoroto, Kota Kediri, Jawa Timur, 64112
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Pengantar Analisis Real**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	17 Mei 2001, di Kota Kediri
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak Ciptaan tersebut pertama kali dilakukan Pengumuman.
Nomor pencatatan	:	000183033

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

YAYASAN PEMBINA LEMBAGA PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI PGRI KEDIRI
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI
PROGRAM PASCASARJANA
Status "Terakreditasi"
SK. BAN PT No: 1042/SK/BAN-PT/Akred/PT/VI/2016 Tanggal. 17 Juni 2016
Jl. K.H. Achmad Dahlan No. 76 Telp : (0354) 771576, 771503, 771495 Kediri

SURAT TUGAS

Nomor: /A/PPs-UN PGRI Kd/VII/2018

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dr. Rr. Forijati, M.M

NIDN : 0028016701

Jabatan : Direktur Pascasarjana

menugaskan kepada:

Nama : Dr. Suryo Widodo, M.Pd.

NIDN : 0002026403

Jabatan : Dosen

Prodi : Magister Keguruan Olahraga

Menulis buku ajar "*Pengantar Analisis Real*" sebagai penulis pada semester gasal tahun akademik 2018/2019.

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dilaksanakan dengan penuh tanggung jawab. Atas perhatian dan kerjasamanya disampaikan terima kasih.

Kediri, 26 Juli 2018

Direktur PPs,

Dr. Rr. Forijati, M.M

YAYASAN PEMBINA LEMBAGA PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI PGRI KEDIRI
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
Status "Terakreditasi"
SK. BAN PT No: 1042/SK/BAN-PT/Akred/PT/VI/2016 Tanggal. 17 Juni 2016
Jl. K.H. Achmad Dahlan No. 76 Telp : (0354) 771576, 771503, 771495 Kediri

SURAT TUGAS

Nomor:4192/C/FKIP-UN PGRI/VII/2018

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dr. Hj. SRI PANCA SETYAWATI, M.Pd
NIDN : 0716046202
Pangkat/Gol. Ruang : Penata Muda Tingkat I/IIIb
Jabatan Fungsional : Asisten Ahli
Jabatan : Dekan FKIP
Unit Kerja : Universitas Nusantara PGRI Kediri

Memberikan tugas kepada:

No	Nama	NIDN	Pangkat Gol. Ruang	Jabatan Fungsional	Keterangan
1	Dr. Suryo Widodo, M.Pd.	0002026403	Pembina/IVa	Lektor Kepala	Penulis
2	Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd.	0707067003	Penata/IIIc	Lektor	Editor

Menulis buku ajar "*Pengantar analisis Real*" pada semester gasal tahun akademik 2018/2019

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dilaksanakan dengan penuh tanggung jawab. Atas perhatian dan kerjasamanya disampaikan terima kasih.

Kediri, 26 Juli 2018
Dekan FKIP,

Dr. Hj. SRI PANCA SETYAWATI, M.Pd

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

(/)

Pilihan ▾ Cari buku...

International Standard Book Number (ISBN)

Beranda

Beranda

Penerbit: Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri

Alamat: Fakulktas Teknik Kampus II Universitas Nusantara PGRI Kediri Mojoroto Gang I No.6 Kediri

Daftar Permohonan ISBN Yang Belum Di Proses

Hapus

Search

	Nomor	Judul	Kepengarangan	Tanggal
No matching records found				

Daftar ISBN Yang Sudah Terdaftar

Search

Judul	Peruntukan	Seri	Kepengarangan	Nomor ISBN	KDT	
Pengantar analisis real	-	-	oleh Suryo Widodo, Yuni Katminingsih	978-602-61393-5-1	KDT	(CetakBar/031

Pengantar analisis real

Buku ini salah satu dari buku analisis matematika yang diberi judul pengantar analisis real.
Bagian pertama: dimulai dari sistem bilangan real yang diawali dengan aksioma kesamaan, aksioma field, memunculkan ketidaksamaan dari aksioma urutan, menurunkan sifat kepadatan dari aksioma kelengkapan. Serta beberapa konsep topologi bilangan real diantaranya dekat dengan, neighborhood, batas atas, batas bawah suatu himpunan.
Bagian kedua: dimulai dari diklasifikasi barisan bilangan real menurut eksistensi batasnya, arah kecenderungannya, kedudukan antar anggotanya, serta sifat khusus lainnya, meliputi: barisan dan limit barisan, kekonvergenan, barisan monoton, sub-barisan dan teorema Bolzano-Weierstrass, barisan Cauchy, barisan divergen sejati dan pengantar deret takhingga.

PENGANTAR ANALISIS REAL

Dr. Suryo Widodo, M.Pd
Yuni Katminingsih,S.Pd.,M.Pd

ISBN: 978-602-61393-5-1

Pengantar Analisis Real

Dr. Suryo Widodo, M.Pd
Yuni Katminingsih,S.Pd.,M.Pd

YAYASAN PEMBINA LEMBAGA PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI PGRI KEDIRI
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI
PROGRAM PASCASARJANA
Status "Terakreditasi"
SK. BAN PT No: 1042/SK/BAN-PT/Akred/PT/VI/2016 Tanggal. 17 Juni 2016
Jl. K.H. Achmad Dahlan No. 76 Telp : (0354) 771576, 771503, 771495 Kediri

SURAT TUGAS

Nomor: 108 /A/PPs-UN PGRI Kd/VII/2018

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dr. Rr. Forijati, M.M
NIDN	: 0028016701
Jabatan	: Direktur Pascasarjana

menugaskan kepada:

Nama	: Dr. Suryo Widodo, M.Pd.
NIDN	: 0002026403
Jabatan	: Dosen
Prodi	: Magister Keguruan Olahraga

Menulis buku ajar "*Pengantar Analisis Real*" sebagai penulis pada semester gasal tahun akademik 2018/2019.

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dilaksanakan dengan penuh tanggung jawab. Atas perhatian dan kerjasamanya disampaikan terima kasih.

Kediri, 26 Juli 2018

Direktur PPs,

Dr. Rr. Forijati, M.M

ISBN: 978-602-61393-5-1

Pengantar Analisis Real

Dr. Suryo Widodo, M.Pd
Yuni Katminingsih,S.Pd.,M.Pd

PENGANTAR ANALISIS REAL

Oleh:

Dr. Suryo Widodo, M.Pd

Yuni Katminingsih,S.Pd.,M.Pd

FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI
2018

Dr. Suryo Widodo, M.Pd.
Yuni Katminingsih, S.Pd.,M.Pd
Pengantar Analisis Real
Kediri; Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri, 2018 viii; 184 hlm.; bib. 1; il.; in.; 26x17 cm
ISBN: 978-602-61393-5-1

Pengantar Analisis Real
Penulis:
Dr. Suryo Widodo, M.Pd.
Yuni Katminingsih, S.Pd.,M.Pd
Sampul/ Lay Out: Abu Bakar, S.Pd.

PENERBIT

Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri
Kampus II, Majoroto Gang I No. 6 Kediri
Email: ft@unpkediri.ac.

KATA PENGANTAR

Dengan rasa syukur alhamdulillah, akhirnya saya dapat menyelesaikan buku ini.

Buku ini salah satu dari buku analisis matematika yang diberi judul pengantar analisis real, Selanjutnya dirinci menjadi dua bagian.

Bagian pertama: dimulai dari sistem bilangan real yang diawali dengan aksioma kesamaan, aksioma field, memunculkan ketidaksamaan dari aksioma urutan, menurunkan sifat kepadatan dari aksioma kelengkapan. Serta beberapa konsep topologi bilangan real diantaranya dekat dengan, neighborhood, batas atas, batas bawah suatu himpunan.

Bagian kedua: dimulai dari diklasifikasi barisan bilangan real menurut eksistensi batasnya, arah kecenderungannya, kedudukan antar anggotanya, serta sifat khusus lainnya, meliputi: barisan dan limit barisan, kekonvergenan, barisan monoton, sub-barisan dan teorema Bolzano-Weierstrass, barisan Cauchy, barisan divergen sejati dan pengantar deret takhingga.

Buku ini terlihat sekali struktur deduktif-aksiomatika. Sehingga mahasiswa harus mencermati lagi konsep-konsep pada mata kuliah pengantar dasar matematika yang menjembatani matakuliah ini.

Teristimewa saya sampaikan kepada Prof. I Ketut Budayasa, Ph.D. dan Dr. Agung Lukito, MS, yang telah banyak memberikan motivasi dan dorongan untuk menyelesaikan buku ini, untuk itu saya ucapkan terimakasih.

Demikian buku ini disusun semoga dapat memperluas dan memperkaya pengetahuan kita dalam bidang matematika. Akhirnya tiada gading yang tak retak, semoga kritik dan saran pembaca dapat menyempurnakan buku ini.

Desember 2018 **Suryo Widodo**

DAFTAR ISI

Halaman

BAB 0

PENDAHULUAN

(Sekelumit tentang sistem bilangan real R)

Suatu sistem aljabar terbentuk, dimulai dengan adanya suatu himpunan takkosong disertai dengan suatu operasi biner yang membentuk ***groupoid***. Apabila sistem ini memenuhi sifat asosiatif, maka terbentuk ***semigroup***. Selanjutnya, terbentuk sistem-sistem berikutnya; seperti, ***monoid*** dan ***group*** apabila memenuhi sifat identitas dan invers secara berturut-turut. Sistem-sistem ini hanya menggunakan satu operasi biner. Namun, ada juga sistem aljabar yang menggunakan dua operasi biner, misalnya, ***field***. Ada dua pendekatan dalam mengonstruksi sistem bilangan real: (1) pendekatan aksiomatik, yaitu, mengembangkan bilangan real dari bilangan asli *(natural numbers/positive numbers/counting numbers/figuring numbers*) dengan mengasumsikan eksistensi R, postulat, dan sifat-sifat yang mengklarifikasinya; (2) pendekatan konstruktif yaitu, mengembangkan bilangan real dari bilangan rasional, bilangan rasional dari bilangan asli; dan bilangan asli dari teori dasar himpunan. (3) pendekatan intuitif yaitu mengembangkan bilangan real dari bilangan yang sudah dikenal sejak duduk dibangku sekolah.

Walaupun matematika ditulis dalam banyak bahasa, seperti Perancis, Jerman, Rusia, Cina, dan, bahasa Inggris. Namun Bahasa matematika memiliki karakteristik khas tertentu. Bahasa matematika sebagian besar ditulis dalam bahasa simbol, menggunakan pernyataan dan argumen yang didasarkan pada tata bahasa dan logika dari pernyataan. Simbol dalam matematika bersifat universal. Sehingga walaupun buku matematika ditulis dalam berbagai Bahasa seperti di atas namun simbol atau istilah matematika yang digunakan relatif sama. Ini yang memudahkan belajar matematika karena hampir setiap buku matematika menuliskan simbol yang sama.

Pernyataan melibatkan aturan tata bahasa untuk menulis rumus yang terbentuk dengan baik, dan untuk menyediakan argumen matematika yang menggunakannya. Rumus yang dibentuk dengan baik melibatkan variabel, dan operasi logis seperti konjungsi ($P\ dan\ Q$), disjungsi ($P\ atau\ Q\ atau\ keduanya$), implikasi ($P\ mengimplikasikan\ Q$), negasi ($bukan\ P$), dan pembilang 'ada' dan 'untuk semua ', bersama-sama, dalam hal ini dengan himpunan dan relasi.

Bilangan real telah dikenalkan pada kita sejak di bangku sekolah dasar, bersama himpunan bilangan lainnya.

N = himpunan semua bilangan alami (=asli/natural)

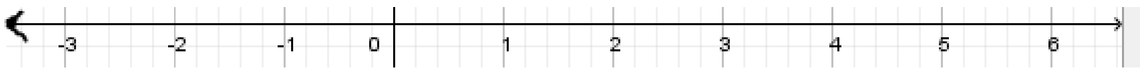
Z = himpunan semua bilangan bulat

Q = himpunan semua bilangan rasional

R = himpunan semua bilangan real

C = himpunan semua bilangan kompleks

Bilangan real atau sering disebut juga bilangan nyata dalam matematika menyatakan suatu bilangan yang dapat dibentuk menjadi desimal. Bilangan real ini meliputi bilangan rasional yang direpresentasikan dalam bentuk desimal berakhir atau bentuk desimal berulang dan bilangan irasional yang direpresentasikan dalam bentuk desimal yang tidak berakhir dan tidak berulang. Untuk bilangan real sendiri direpresentasikan sebagai salah satu titik pada garis bilangan.

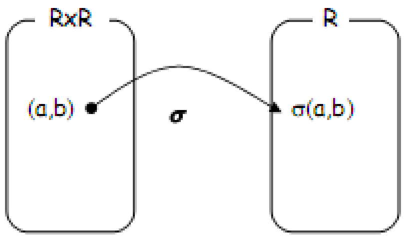


Gambar 0.1: Garis bilangan real

Pada buku ini akan dibahas "$Sistem\ Matematika$" pada bilangan real selanjutnya disebut sistem bilangan real.

Definisi 0.1: R adalah himpunan semua bilangan real.

Definisi 0.2: Operasi biner pada himpunan R adalah suatu fungsi σ dengan domain RxR dan range di dalam R.



Gambar 0.2: Operasi biner σ

Operasi penjumlahan aritmetika biasa "$+$" adalah operasi biner karena "$+$" merupakan fungsi yang memasangkan setiap pasangan terurut (a, b) pada RxR dengan sebuah bilangan $(a + b)\ di\ R$.

Operasi perkalian aritmetika biasa "+" adalah operasi biner karena "." merupakan fungsi yang memasangkan setiap pasangan terurut (a, b) pada RxR dengan sebuah bilangan (axb) di R.

Contoh:

$(4,5) \in RxR, maka\ +(4,5) = 9 \in R$

$(4,5) \in RxR, maka\ .(4,5) = 20 \in R$

Suatu himpunan R bersama operasi " $+$ " dan " $.$ " berturut-turut disebut sistem bilangan real.

Aksioma kesamaan pada bilangan real.

Jika R suatu bilangan real dan " $=$ " adalah relasi sama dengan maka

(K1) $(\forall a \epsilon R). a = a$

(K2) $(\forall a, b \epsilon R). a = b\ maka\ b = a$

(K3) $(\forall a, b, c \epsilon R). a = b\ dan\ b = c\ maka\ a = c$

(K4) $(\forall a, b, c, d \epsilon R). a = b\ dan\ c = d\ maka\ a + c = b + d$

(K5) $(\forall a, b, c, d \epsilon R). a = b\ dan\ c = d\ maka\ a.c = b.d$

Beberapa teorema tentang kekekalan penjumlahan dan perkalian yang diturunkan dari relasi kesamaan.

Teorema 0.1: Dua buah bilangan real yang sama jika masing-masing ruas ditambah dengan bilangan real yang sama maka hasilnya tetap sama (tidak akan mengubah tanda kesamaan).

Secara simbolik dapat ditulis sebagai berikut:

$(\forall a, b, c\ \epsilon R). a = b$ maka $a + c = b + c$

Bukti:

$(\forall c \epsilon R). c = c$ (aksioma K1)

$(\forall a, b, c\ \epsilon R). a = b$ dan $c = c$ maka $a + c = b + c$ (aksioma K4)

Jadi $(\forall a, b, c\ \epsilon R). a = b\ dan\ c = c\ maka\ a + c = b + c$

Teorema 0.2: $(\forall a, b, c \epsilon R). a = b \ maka \ a . c = b . c$

Dua buah bilangan real yang sama jika masing-masing ruas dikalikan dengan bilangan real yang sama maka hasilnya tetap sama (tidak akan mengubah tanda kesamaan)

Bukti:

$(\forall c \epsilon R). c = c$ (aksioma K1)

$(\forall a, b, c \ \epsilon R). a = b \ dan \ c = c \ maka \ a.c = b.c$ (aksioma K5)

Jadi $(\forall a, b, c \ \epsilon R). a = b \ dan \ c = c \ maka \ a.c = b.c$

Latihan 0

1. Jika $a = z \ dan \ b = z$ maka $a = b$, $(\forall a, b, z \ \epsilon R)$

   Apakah pernyataan tersebut benar? Jika benar buktikan dan jika salah berikan contoh penyangkalnya!

2. Diketahui:

   $W = \{p \ / \ p = b + z.n, \quad untuk \ suatu \ z \epsilon N, b \epsilon R\}$

   $p, q \ \epsilon \ W$ maka $p = b + z.n$ dan $q = d + z.n$, untuk suatu $z \epsilon N, b, d \epsilon R$

   Didefinisikan $p = q$ jika dan hanya jika $b = d$

   Apakah W juga memenuhi aksioma kesamaan? Jika ya buktikan dan jika tidak berikan contoh penyangkalnya!

$< \boldsymbol{blank} >$

BAB I

SIFAT-SIFAT ALJABAR PADA BILANGAN REAL

Pada bab ini kita akan membahas "struktur aljabar" pada sistem bilangan real. Operasi biner pada himpunan R dimaksudkan suatu fungsi σ dengan domain RxR dan range di dalam R. Berarti operasi biner memasangkan pasangan terurut (a, b) dari elemen-elemen RxR dengan elemen tunggal $\sigma(a, b)$ dalam R.

A. Field Dari Bilangan Real

Pada himpunan bilangan real R terdapat dua operasi biner, dinyatakan dengan "+" dan "." dan berturut-turut disebut penjumlahan dan perkalian. Operasi tersebut memenuhi sifat- sifat berikut.

(A1) $a + b = b + a, \forall a, b \in R$ (sifat komutatif penjumlahan)

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in R$ (sifat assosiatif penjumlahan)

(A3) Terdapat elemen 0 di R sehingga $0 + a = a, \forall a \in R$ (eksistensi elemen nol)

(A4) Untuk setiap $a \in R$, terdapat elemen $-a \in R$ sehingga $a + (-a) = 0$ (eksistensi elemen negatif)

(M1) $a . b = b . a, \forall a, b \in R$ (sifat komutatif perkalian)

(M2) $(a . b) . c = a . (b . c), \forall a, b \in R$ (sifat asosiatif perkalian)

(M3) Terdapat elemen 1 di R yang berbeda dengan 0 sehingga

$1 . a = a, \forall a \in R$ (eksistensi elemen satuan di R)

(M4) Untuk setiap $a \neq 0$ di R terdapat elemen $\frac{1}{a}$ di R sehingga

$a \, . \, \frac{1}{a} = 1$ dan $\frac{1}{a} . a = 1$ (eksistensi elemen kebalikan)

(D) $a \, . \, (b + c) = (a. b) + (a. c), \, \forall a, b, c \in R$ (sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan)

B. Beberapa Teorema

Teorema B.1.1 :

(i) Jika z dan a elemen R sehingga $z + a = a$ maka $z = 0.$

(ii) Jika u dan $b \neq 0$ elemen R sehingga $u. b = b$ maka $u = 1$

Bukti :

(i) Akan dibuktikan $(z, a \in R) \; z + a = a \Rightarrow z = 0$

$z + a = a$ (diketahui)

$(z + a) + (-a) = a + (-a)$ $(T. 0.1)$

$z + (a + (-a)) = a + (-a)$ (A2)

$z + 0 = 0$ (A4)

$z = 0$ (A3)

(ii) Akan dibuktikan $(u, b \in R, b \neq 0) \; u \, . \, b = b \Rightarrow u = 1$

Karena $b \neq 0$ maka $(\exists \frac{1}{b} \in R) \; u \, . \, b = b$ (diketahui)

$(u \, . \, b) \, . \, \frac{1}{b} = b \, . \, \frac{1}{b}$ $(T. 0.2)$

$u \, . \, (b \, . \, \frac{1}{b}) = (b \, . \, \frac{1}{b})$ (M2)

$u \, . \, 1 = 1$ (M4)

$u = 1$ (M3)

Teorema B.1.2:

(i) Jika $a\ dan\ b$ elemen di R sedemikian hingga $a + b = 0$ maka $b = -a$

(ii) Jika $a\ dan\ b$ elemen di R dan $a \neq 0$ sedemikian hingga $a\,.\,b = 1$ maka $b = \frac{1}{a}$.

Bukti:

(i) Akan dibuktikan $(a, b \in R)\ a + b = 0 \Rightarrow b = -a$

$a + b = 0$	(diketahui)
$(-a) + (a + b) = (-a) + 0$	$(T. 0.1)$
$((-a) + a) + b = (-a)$	(A2 dan A3)
$0 + b = -a$	(A4)
$b = -a$	(A3)

(ii) Akan dibuktikan $(a, b \in R \wedge a \neq 0)\ a\,.\,b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a}$

$a\,.\,b = 1$	(diketahui)
$(\frac{1}{a})\,.\,(a\,.\,b) = (\frac{1}{a})\,.\,1$	$(T. 0.2)$
$((\frac{1}{a})\,.\,a)\,.\,b = (\frac{1}{a})\,.\,1$	(M2)
$1\,.\,b = \frac{1}{a}$	(M4 dan M3)
$b = \frac{1}{a}$	(M3)

Teorema B.1.3:

(i) Misalkan $a, b \in R$ maka persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = (-a) + b$

(ii) Misalkan $a, b \in R,\ a \neq 0$, maka persamaan $a.x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = (\frac{1}{a}).b$

Bukti :

(i) Akan dibuktikan $(a, b \in R)\ a + x = b \Rightarrow x = (-a) + b$

$a + x = b$ (diketahui)

$(-a) + (a + x) = (-a) + b$ $(T.0.1)$

$((-a) + a) + x = (-a) + b$ (A2)

$0 + x = (-a) + b$ (A3)

$x = (-a) + b$ (A4)

Bentuk yang terakhir merupakan penyelesaian dari persamaan $a + x = b.$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa penyelesaian persamaan $a + x = b$ adalah tunggal.

Misalkan $p\ dan\ q$ adalah dua penyelesaian dari persamaan $a + x = b$ sehingga berlaku

$a + p = b$

$(-a) + (a + p) = (-a) + b$ $(T.0.1)$

$((-a) + a) + p = (-a) + b$ (A2)

$0 + p = (-a) + b$ (A4)

$p = (-a) + b$ (A3) (1.1)

dilain pihak,

$a + q = b$

$(-a) + (a + q) = (-a) + b$ $(T.0.1)$

$((-a) + a) + q = (-a) + b$ (A2)

$0 + q = (-a) + b$ (A4)

$q = (-a) + b$ (A3) (1.2)

Dari (1.1) dan (1.2) diperoleh bahwa $p = q$ sehingga persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu $x = (-a) + b.$

(ii) Akan dibuktikan $(a, b \in R,\ a \neq 0) a \,.\, x = b \Rightarrow x = (\frac{1}{a}) \,.\, b$

$a \,.\, x = b$ (diketahui)

$(\frac{1}{a}) \,.\, (a \,.\, x) = (\frac{1}{a}) \,.\, b$ $(T.0.2)$

$((\frac{1}{a}) \,.\, a) \,.\, x = (\frac{1}{a}) \,.\, b$ (M2)

$1 \,.\, x = (\frac{1}{a}) \,.\, b$ (M4)

$x = (\frac{1}{a}) \,.\, b$ (M3)

Bentuk terakhir ini adalah penyelesaian dari persamaan $a \,.\, x = b$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa penyelesaian persamaan $a \,.\, x = b$ adalah tunggal.

Misalkan $p\ dan\ q$ merupakan penyelesaian dari persamaan $a \,.\, x = b$

Untuk p berlaku:

$a \,.\, p = b$

$(\frac{1}{a}) \,.\, (a \,.\, p) = (\frac{1}{a}) \,.\, b$ $(T.0.1)$

$((\frac{1}{a}) \,.\, a) \,.\, p = (\frac{1}{a}) \,.\, b$ (M2)

$1\,.\,p \;=\; (\frac{1}{a})\,.\,b$ (M4)

$p \;=\; (\frac{1}{a})\,.\,b$ (M3) (1.3)

Untuk q berlaku: $a\,.\,q \;=\; b$

$(\frac{1}{a})\,.\,(a\,.\,q\,) \;=\; (\frac{1}{a})\,.\,b$ $(T.0.2)$

$((\frac{1}{a})\,.\,a)\,.\,q \;=\; (\frac{1}{a})\,.\,b$ (M2)

$1\,.\,q \;=\; (\frac{1}{a})\,.\,b$ (M4)

$q \;=\; (\frac{1}{a})\,.\,b$ (M3) (1.4)

Dari (1.3) dan (1.4) diperoleh $p \;=\; q$

Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $a\,.\,x \;=\; b$ mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu $(\frac{1}{a})\,.\,b$

Teorema B.1.4: Jika a sebarang elemen R, maka:

(i) $a\,.\,0 \;=\; 0$

(ii) $(-1)\,.\,a \;=\; -a$

(iii) $-(-a) \;=\; a$

(iv) $(-1)(-1) \;=\; 1$

Bukti:

(i) Akan dibuktikan $a \in R$ sebarang $\Rightarrow a\,.\,0 \;=\; 0$

$a \,+\, a\,.\,0 \;=\; a\,.\,1 \,+\, a\,.\,0$ (M3)

$\;=\; a\,.\,(1 \,+\, 0)$ (D)

$\;=\; a\,.\,1$ (A3)

$a + a.0 = a$ (M3)

Selanjutnya menurut $teorema\ B.1.3(i)$

$a.0 = (-a) + a$

$a.0 = 0$

(ii) Akan dibuktikan $a \in R$ sebarang $\Rightarrow (-1).a = -a$

$a + (-1).a = (1).a + (-1)a$ (M3)

$= (1 + (-1)).a$ (D)

$= 0.a$ (A4)

$= 0$ ($T.B.1.4(i)$)

Selanjutnya dengan menggunakan $teorema\ B.1.3(i)$ diperoleh

$a + (-1).a = 0$

$(-1).a = (-a) + 0$ ($T.B.1.3(i)$)

$(-1).a = (-a)$ (A3)

(iii) Akan dibuktikan $a \in R \Rightarrow -(-a) = a$

$(\forall a \in R)(\exists -a \in R).(-a) + a = 0$ (A4)

$(-a) + a = 0 \Rightarrow a = -(-a) + 0$ (T.B.1.3(i))

$-(-a) = a$ (A3)

(iv) Akan dibuktikan $a \in R \Rightarrow (-1).(-1) = 1$

$(-1).a = -a$ ($T.B.1.4(ii)$)

Misalkan $a = -1$ maka

$(-1).(-1) = -(-1)$ (substitusi $a = -1$)

$= 1$ ($T.B.1.4(iii)$)

Teorema B.1.5: Misalkan a, b, c sebarang elemen R

(i) Jika $a \neq 0$ maka $\frac{1}{a} \neq 0$ dan $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

(ii) Jika $a . b = a . c$ dan $a \neq 0$ maka $b = c$

(iii) Jika $a . b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$

Bukti:

(i) Akan dibuktikan $a, b, c \in R, a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \neq 0$ dan $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

Jika diberikan $a \neq 0$ maka ada $\frac{1}{a} \neq 0$ (M4)

Jika $\frac{1}{a} = 0$ maka menurut teorema *B.1.4(i)* diperoleh

$$a . \frac{1}{a} = a . 0 = 0$$

Ini bertentangan dengan *(M4)*

Jadi haruslah $\frac{1}{a} \neq 0$

Selanjutnya dari *(M4)* diperoleh

Jika $\frac{1}{a} \neq 0$ maka ada $\frac{1}{\frac{1}{a}}$ sedemikian hingga

$$\left(\frac{1}{a}\right) . \frac{1}{\frac{1}{a}} = 1$$

$$a . \left(\left(\frac{1}{a}\right) . \frac{1}{\frac{1}{a}}\right) = a . 1 \qquad (T.0.2)$$

$$\left(a . \left(\frac{1}{a}\right)\right) . \frac{1}{\frac{1}{a}} = a . 1 \qquad \text{(M2)}$$

$$1 . \frac{1}{\frac{1}{a}} = a \qquad \text{(M4)}$$

$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$ (M3)

(ii) Akan dibuktikan $a, b, c \in R, a \,.\, b = a \,.\, c \Rightarrow b = c$

$a \,.\, b = a \,.\, c$ (diketahui)

$(\frac{1}{a}) \,.\, (a \,.\, b) = (\frac{1}{a}) \,.\, (a \,.\, c)$ (kedua ruas dikali $\frac{1}{a}$) $(T.0.2)$

$((\frac{1}{a}) \,.\, a) \,.\, b = ((\frac{1}{a}) \,.\, a) \,.\, c$ (M2)

$1 \,.\, b = 1.c$ (M4)

$b = c$ (M3)

(iii) Akan dibuktikan $a, b, c \in R, a \,.\, b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Misalkan $a \neq 0$ maka ada $\frac{1}{a}$. (M4)

$(\frac{1}{a}) \,.\, (a \,.\, b) = (\frac{1}{a}) \,.\, 0$ (kedua ruas dikalikan $\frac{1}{a}$)

$(\frac{1}{a} \,.\, a) \,.\, b = 0$ (A2 dan T.B.1.4(i))

$1 \,.\, b = 0$ (M4)

$b = 0$ (M3)

Dengan cara yang sama, misalkan $b \neq 0$.

$a \,.\, b = 0$ maka $a = 0$

Catatan:

Beberapa teorema diatas menguraikan sedikit tentang sifat-sifat aljabar pada bilangan real. Penambahan sifat-sifat lain dapat dideduksikan dari aksioma dan teorema di atas. Misalkan didefinisikan beberapa operasi berikut:

Pengurangan: $a - b = a + (-b), a, b \in R$

Pembagian: $\frac{a}{b} = a.\left(\frac{1}{b}\right), a, b \epsilon R$ dan $b \neq 0$.

Selanjutnya perkalian $a\,.\,b$ ditulis ab, aa ditulis $a^2, (a^2)a$ ditulis a^3dan seterusnya, untuk $n \in N$ didefinisikan $a^{n+1} = (a^n)a$. Kita sepakati $a^0 = 1$dan $a^1 = a$ untuk setiap $a \in R$. Demikianjuga untuk $a \neq 0$ notasi a^{-1} digunakan untuk $\frac{1}{a}$ dan jika $n \in N$, $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

C. Bilangan Rasional

Elemen R yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{b}{a}$ dengan $a, b \in Z$ dan $a \neq 0$ disebut bilangan rasional. Himpunan semua bilangan rasional di R dinyatakan dengan notasi standar Q.

Jadi $Q = \{x = \frac{b}{a} \mid a, b \in Z, a \neq 0\}$.

Jumlah dan hasil kali dua bilangan rasional juga bilangan rasional. Juga sifat-sifat yang dibahas di atas berlaku. Tidak semua bilangan real merupakan bilangan rasional. Pada abad VI sebelum masehi **Pythagoras** menemukan bahwa panjang sisi miring segitiga siku-siku satuan (panjang sisi siku-sikunya masing-masing satu) tidak dapat dinyatakan sebagai bilangan rasional. Dengan kata lain bahwa kuadrat dari bilangan tidak rasional dapat sama dengan dua. Penemuan ini mempengaruhi perkembangan matematika Yunani, sehingga anggota R yang bukan anggota Q disebut sebagai $bilangan\ irasional$.

Teorema C.1.6: Tidak ada bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$.

Bukti:

Andaikan ada $r = \frac{b}{a}$ dengan $a, b \in Z, a \neq 0$ dan $r^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$

Dapat dipilih a dan b bilangan bulat positif dan memiliki pembagi persekutua terbesar satu "$(a, b) = 1$" atau a dan b relatif prima.

Sehingga diperoleh $b^2 = 2a^2$. Jelas bahwa b^2 adalah genap. Karena b^2 genap maka *b* juga genap (klaim). Karena *b* bilangan genap maka dapat ditulis dalam bentuk $b = 2m$ dengan $m \in Z$, sehingga diperoleh $(2m)^2 = 2a^2$ atau $4m^2 = 2a^2$ atau $2m^2 = a^2$. Jadi a^2 juga genap, yang mengimplikasikan a juga genap.

Dari argumen diatas diperoleh bahwa $a\ genap$ dan $b\ genap$ hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa a dan b relatif prima yaitu $(a, b) = 1$. Jadi pengandaian harus diingkar, yaitu tidak ada bilangan rasional $r = \frac{b}{a}$ sedemikian hingga $r^2 = 2$.

D. Contoh-contoh

Contoh C.1.1: Apakah konvers teorema $B.1.5(iii)$ masih berlaku?

Jawab :

Konvers dari teorema $B.1.5c$ adalah "Misalkan a, b, c sebarang elemen R, jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $a \,.\, b = 0$"

Hipotesis dari pernyataan diatas merupakan bentuk dinjungsi, sehingga perlu ditinjau tiga kasus:

Kasus (1)

Jika $a = 0$ dan $b \neq 0$ maka

$a \,.\, b = 0 \,.\, b$

$= 0$ [*T.B.1.4(i)*]

Kasus (2)

Jika $a \neq 0$ dan $b = 0$ maka

$a \,.\, b = a.0$

$= 0$ [*T.B.1.4(i)*]

Kasus (3)

Jika $a = 0$ dan $b = 0$ maka

$a.b = 0.0$

$= 0$ [*T.B.1.4(i)*]

Contoh C.1.2: Selesaikan persamaan $4x + 3 = 11$ dengan menggunakan aksioma atau teorema yang berlaku, berikan penjelasan dalam setiap langkahnya.

Jawab:

$4x + 3 = 11$ [diketahui]

$(4x + 3) + (-3) = 11 + (-3)$ [kedua ruas ditambah -3]

$4x + (3 + (-3)) = 11 + (-3)$ [A2]

$4x + 0 = 8$ [A4]

$4x = 8$ [A3]

$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot 4x = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 8$ [kedua ruas dikali $\frac{1}{4}$]

$(\frac{1}{4} \cdot 4)x = 2$ [M2]

$1\,x = 2$ [M4]

$x = 2$ [M3]

E. Latihan 1

1. Buktikan klaim "bahwa jika b^2 genap maka b genap".
2. Selesaikan soal berikut dengan menggunakan sifat atau teorema yang berlaku, serta jelaskan setiap langkahnya.
   (a) $2x + 5 = 8$
   (b) $x^2 = 2x$
   (c) $(x - 1)(x + 2) = 0.$
3. Buktikan bahwa jika $a, b \in R$ maka
   (a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$
   (b) $(-a) . (-b) = a . b.$
   (c) $\frac{1}{(-a)} = -(\frac{1}{a})$ untuk $a \neq 0$
4. Jika $a \in R$ berlaku $a . a = a$ maka $a = 0$ atau $a = 1$. Buktikan!
5. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ tunjukkan bahwa $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} . \frac{1}{b}$
6. Gunakan argumen pembuktian $teorema\ C. 1.6$ untuk menunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional x sedemikian hingga $x^2 = 3.$
7. Gunakan argumen pembuktian teorema $C. 1.6$ untuk menunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional x sedemikian hingga $x^2 = 6.$
8. Tunjukkan bahwa jika $w \in R$ adalah irasional dan $r \neq 0$ adalah rasional maka $w + r$ dan wr adalah irasional.
9. Jika x dan y adalah rasional maka $x + y$ dan xy adalah rasional. Buktikan!
10. Jika x dan y adalah irasional apakah $x + y$ dan xy juga irasional? Jika ya buktikan! dan jika tidak berikan contoh penyangkalnya.

$< blank >$

BAB II

SIFAT KETERURUTAN PADA R

Sifat keterurutan R menimbulkan gagasan tentang kepositifan (*positivity*) dan ketaksamaan (*inequality*).

A. Aksioma Urutan Pada R

$P \subseteq R$, $P \neq \phi$, P disebut himpunan bilangan real positif yang memenuhi sifat berikut:

U.1 Jika $a, b \in P$ maka $a + b \in P$

U.2 Jika $a, b \in P$ maka $ab \in P$

U.3 Jika $a \in R$ maka tepat satu dari berikut berlaku:

$a \in P$ atau $a = 0$ atau $-a \in P$

Dua sifat pertama menjamin sifat ketertutupan dari operasi penjumlahan dan perkalian pada P. Aksioma U3 di atas disebut sifat trikotomi, karena dia membagi R dalam tiga tipe elemen yang berbeda. Hal ini menyatakan bahwa bilangan real negatif $\{-a: a \in P\}$ tidak mempunyai elemen persekutuan dengan P. R adalah gabungan dari tiga himpunan yang saling asing yaitu $P \cup \{0\} \cup \{-a: a \in P\}$

Definisi A.2.1: Jika $a \in P$ maka a adalah bilangan real positif (positif kuat) dan ditulis $a > 0$. Jika $a \in P \cup \{0\}$ maka a adalah bilangan real tidak negatif, dan ditulis $a \geq 0$.

Jika $-a \in P$ maka a adalah bilangan negatif, dan ditulis $a < 0$. $Jika - a \in P \cup \{0\}$ maka a adalah bilangan real tidak positif, dan ditulis $a \leq 0$.

Definisi A.2.2 : Misalkan $a, b \in R$

(i) Jika $a - b \in P$ maka ditulis $a > b$ atau $b < a$

(ii) Jika $a - b \in P \cup \{0\}$ maka ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a$

Kita sepakat bahwa notasi:

$a < b < c$ berarti $a < b$ dan $b < c$ dengan cara yang sama,

$a \leq b \leq c$ berarti $a \leq b$ dan $b \leq c$ begitu juga,

$a \leq b < d$ berarti $a \leq b$ dan $b < d$

B. Beberapa Teorema

Teorema B.2.3: Misalkan $a, b, c \in R$

(i) Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$

(ii) Tepat satu berikut ini berlaku: $a > b$, $a = b$, atau $a < b$

(iii) Jika $a \geq b$ dan $b \geq a$ maka $a = b$

Bukti:

(i) Misalkan $a, b, c \in R$

Akan ditunjukkan $(\forall\, a, b, c \in R)\ a > b$ dan $b > c \Rightarrow a > c$

$a > b$ berarti $(a - b) \in P$	$[A.2.2(i)]$
$b > c$ berarti $(b - c) \in P$	$[A.2.2(i)]$
Sehingga $(a - b) + (b - c) \in P$	$[U2]$
$a + \big((-b) + b\big) + (-c)) \in P$	$[A2]$
$a + 0 + (-c) \in P$	$[A4]$
$a + (-c) \in P$	$[A3]$
$a - c \in P$	
$a > c$	$[A2.2.(i)]$

Terbukti bahwa: $a > b$ dan $b > c \Rightarrow a > c$

(ii) $a, b \in R$ maka $a - b \in R$

Menurut sifat trikotomi $(U3)$ berlaku tepat satu: $(a - b) \in R$ atau $(a - b) = 0$ atau $-(a - b) \in P$

Sehingga diperoleh

$(a - b) \in P \Rightarrow a > b$

$(a - b) = 0 \Rightarrow a = b$

$-(a - b) = (b - a) \in P \Rightarrow b > a$

Jadi berlaku tepat satu berikut: $a > b$ atau $a = b$ atau $a < b$

(iii) Misalkan $a, b \in R$

Akan ditunjukkan $a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$

Andaikan $a \neq b$

Berarti $a > b \; atau \; b > a$ $\quad [T.B.2.3.(ii)]$

Hal ini kontradiksi dengan hipotesis $b \geq a \; dan \; a \geq b$

Jadi haruslah $a = b$

Teorema B.2.4:

(i) Jika $a \in R$ dan $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$

(ii) $1 > 0$

(iii) Jika $n \in N$ maka $n > 0$

Bukti

(i) Akan dibuktikan bahwa

$a \in R$ dan $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Dari sifat trikotomi diperoleh bahwa,

Jika $a \neq 0$, maka $a \in P$ atau $-a \in P$

a) $\quad a \in P \Rightarrow a.a = a^2 \in P$

$\Rightarrow a^2 > 0$

b) $-a \in P \Rightarrow (-a)(-a) = a.a = a^2 \in P$

$\Rightarrow a^2 > 0$

Jadi jika $a \in R \wedge a \neq 0$ maka $a^2 > 0.$

(ii) Akan dibuktikan bahwa $1 > 0$

$1 = 1.1 = (1)^2$

$1 \in R \wedge 1 \neq 0$ maka $(1)^2 > 0$

Jadi $1 > 0$

(iii) Akan dibuktikan $n \in N \Rightarrow n > 0$

Untuk membuktikan hal ini digunakan induksi matematika:

(a) Untuk $n = 1,$ benar $1 > 0$

(b) Misalkan benar untuk $n = k$ yaitu $k > 0$

Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$ yaitu $k + 1 > 0$

Bukti:

$k > 0 \Rightarrow k \in P$

$1 > 0 \Rightarrow 1 \in P$

$k + 1 \in P$

$k + 1 > 0$

Dari (a) dan (b) dapat disimpulkan:

Jika $n \in N$ maka $n > 0$ merupakan pernyataan yang benar untuk setiap n bilangan asli.

Teorema B.2.5: Misalkan $a, b, c, d \in R.$

(i) Jika $a > b$ maka $a + c > b + c.$

(ii) Jika $a > b$ dan $c > d$ maka $a + c > b + d.$

(iii) Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$.

Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$.

(iv) Jika $a > 0$ maka $1/_a > 0$.

Jika $a < 0$ maka $1/_a < 0$.

Bukti:

(i) Misalkan $a, b, c \in R$

Akan ditunjukkan: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$a > b$ berarti $a - b \in P$

$a + (-b) \in P$

$a + 0 + (-b) \in P$

$a + (c + (-c)) + (-b) \in P$

$(a + c) + ((-c) + (-b)) \in P$

$(a + c) + ((-b) + (-c)) \in P$

$(a + c) + (-1)(b + c) \in P$

$(a + c) + (-(b + c)) \in P$

$(a + c) - (b + c) \in P$

$a + c > b + c$

(ii) Akan dibuktikan $a > b$ dan $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

$a > b \Rightarrow a - b \in P$

$c > d \Rightarrow c - d \in P$

$a - b + c - d \in P$

$a + (-b) + c + (-d) \in P$

$a + c + (-b) + (-d) \in P$

$(a + c) + (-1)(b + d) \in P$

$(a + c) - (b + d) \in P$

$a + c > b + d$

(iii) Misalkan $a, b, c \in R$.

Akan ditunjukkan: $a > b$ dan $c > 0 \Rightarrow ca > cb$.

$a > b \Rightarrow a - b \in P$

$c > 0 \Rightarrow c \in P$

$c\,(a - b) \in P$

$c\,(a + (-b)) \in P$

$ca + c\,(-b) \in P$

$ca - cb \in P$

$ca > cb$

Bukti bagian kedua sebagai latihan

(iv) Misalkan $a \in R$ Akan ditunjukkan : $a > 0 \Rightarrow {}^1/_a > 0$.

Jika $a > 0$ maka $a \neq 0$ (sifat trikotomi)

Sehingga ${}^1/_a \neq 0$,

Andaikan ${}^1/_a < 0$ berarti $a \cdot {}^1/_a = 1 < 0$ kontradiksi dengan $T.B.2.5(iii)$ Jadi haruslah ${}^1/_a > 0$

Bukti bagian kedua sebagai latihan

Teorema B.2.6: Jika $a, b \in R$ dan $a < b$ maka $a < ½(a + b) < b$

Bukti:

Misalkan $a, b \in R$.

Akan ditunjukkan $a < b \Rightarrow a < ½\,(a + b) < b$.

$a < b \Rightarrow 2a = a + a < a + b$

$a < b \Rightarrow a + b < b + b = 2b$

Sehingga diperoleh $2a < a + b < 2b$

Karena $2 \in N$ maka $2 > 0$

Akibatnya $\frac{1}{2} > 0$

Dengan mengalikan ½ pada setiap ruas diperoleh :

$a = \frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a + b) < \frac{1}{2}(2b) = b$

Sehingga terbukti : $a < b \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.

Corollary B.2.7: *(Akibat dari $teorema\ B.2.6$).*

Jika $b \in R$ dan $b > 0$ maka $0 < \frac{1}{2} b < b$

Bukti:

Menurut $teorema\ B.2.6$: $a, b \in R\ a < b \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.

Ambil $a = 0$.

$b, 0 \in R$ dan $b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(0 + b) < b$

sehingga diperoleh $0 < \frac{1}{2} b < b$

Teorema B.2.8: Jika $a \in R$ sehingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Bukti :

Andaikan $a > 0$

Menurut T.B.2.7 $a > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} a < a$

Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2} a > 0$.

Diperoleh $0 < \varepsilon < a$

Bertentangan dengan hipotesis yaitu $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$

Jadi haruslah $a = 0$.

Teorema B.2.9: Jika $a, b \in R$ dan $a - \varepsilon < b$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a \leq b$.

Bukti:

Andaikan: $a > b$

Berarti $(a - b) > 0$, ambil $\varepsilon_0 = (a - b)$

Sehingga $a - (a - b) < b$ atau $a - a + b < b$ atau $b < b$.

Hal ini tidak mungkin, dengan demikian pengandaian salah.

Jadi haruslah $a \leq b$.

Teorema B.2.10: Jika $ab > 0$ maka

(i) $a > 0$ dan $b > 0$

(ii) $a < 0$ dan $b < 0$

Bukti:

$ab > 0 \Rightarrow a \neq 0$ dan $b \neq 0$. *(karena jika a = 0 atau b = 0 maka ab=0)*

Jika $a \neq 0$ maka (i) $a > 0$ atau (ii) $a < 0$ (sifat trikotomi).

Kasus (i):

$a > 0 \Rightarrow 1/a > 0$

sehingga $(\frac{1}{a})\, ab = ((\frac{1}{a})a)b = 1\, b = b > 0$

Kasus (ii):

$a < 0 \Rightarrow 1/a < 0$

Sehingga $(\frac{1}{a})\, ab = ((\frac{1}{a})a)b = 1\, b = b < 0$

Corollary B.2.11: *(Akibat teorema B.2.10)*

Jika $ab < 0$ maka : (i) $a < 0$ dan $b > 0$ atau (ii) $a > 0$ dan $b < 0$

Bukti :

$ab < 0 \Rightarrow a \neq 0$ dan $b \neq 0$. *(karena jika a = 0 atau b = 0 maka ab = 0)*

Jika $a \neq 0$ maka (i) $a < 0$ atau (ii) $a > 0$ (sifat trikotomi).

Kasus (i):

$a < 0 \Rightarrow 1/a < 0$

sehingga $(1/a)\, ab = ((1/a)a)b = 1\, b = b > 0$

Kasus (ii):

$a > 0 \Rightarrow 1/a > 0$

Sehingga $(1/a)\, ab = ((1/a)a)b = 1\, b = b < 0$

C. Contoh-Contoh

Sekarang akan dibahas bagaimana sifat-sifat keterurutan dipakai dalam menyelesaikan soal-soal tentang ketidaksamaan.

Contoh C.2.1: Tentukan himpunan A semua bilangan real x sedemikian sehingga $2x + 3 \leq 6$

Jawab:

$x \in A \Leftrightarrow 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

Jadi $A = \{x \in R \mid x \leq \frac{3}{2}\}$

Contoh C.2.2: Tentukan himpunan B semua bilangan real x sedemikian hingga $x^2 + x > 2$.

Jawab:

$x \in B \Leftrightarrow x^2 + x > 2 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0$

kasus (i)

$x - 1 > 0$ dan $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ dan $x > -2$

kasus (ii)

$x - 1 < 0$ dan $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ dan $x < -2$

dari kedua kasus diperoleh $B = \{x \in R \mid x > 1\} \cup \{x \in R \mid x < -2\}$

Contoh C.2.3: Tentukan himpunan $C = \{x \in R \mid \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$

Jawab:

$x \in C \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} < 0$

Kasus (i)

$x - 1 < 0$ dan $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ dan $x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 1$

Kasus (ii)

$x - 1 > 0$ dan $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 1$ dan $x < -2$ *(tidak mungkin ada)*

Jadi $C = \{x \in R \mid -2 < x < 1\}$

Contoh C.2.4: Jika $a \geq 0$ dan $b \geq 0$ maka

(i) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

(ii) $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

(iii) $\sqrt{ab} \leq ½ (a + b)$.

Bukti:

(i) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

$a > 0$ dan $b > 0 \Leftrightarrow a + b > 0$

$(b - a)(a + b) = b^2 - a^2 > 0$

sehingga $a^2 < b^2$

$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ berarti $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$

$\sqrt{a} > 0$ dan $\sqrt{b} > 0$ maka $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

diperoleh $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = b - a > 0$

sehingga $a < b$

(ii) $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$

$a \geq 0$ dan $b \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 0$

$(b - a)(a + b) = b^2 - a^2 \geq 0$

sehingga $a^2 \leq b^2$

$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ berarti $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$

$\sqrt{a} \geq 0$ dan $\sqrt{b} \geq 0$ maka $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$

diperoleh $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = b - a \geq 0$

sehingga $a \leq b$

(iii)akan dibuktikan $\sqrt{ab} \leq ½\,(a + b)$

untuk $a = b$ jelas dipenuhi, mengapa?

$a > 0$ dan $b > 0$ dan $a \neq b$ maka $\sqrt{a} > 0$ dan $\sqrt{b} > 0$

begitu juga $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$

sehingga $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ $(TB.2.4)$

berarti, $a - 2\sqrt{ab} + b > 0$

dan diperoleh $\sqrt{ab} < ½\,(a + b)$

Contoh C.2.5: Buktikan ketaksamaan Bernoulli :

Jika $x > -1$ maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in N$.

Bukti :

Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika

Misalkan $S = \{n \in N \mid (1 + x)^n \geq 1 + nx\}$

Untuk $n = 1$ maka $(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1.x$ benar

Sehingga $1 \in S$

Jika $k \in S$ maka akan dibuktikan $k + 1 \in S$

$k \in N$ maka $(1 + x)^k \geq 1 + kx$

$$
\begin{aligned}
(1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k(1 + x) \\
&\geq (1 + kx)(1 + x) \\
&\geq 1 + (k + 1)\, x + k\, x^2 \\
&\geq 1 + (k + 1)\, x
\end{aligned}
$$

sehingga $k + 1 \in S$

Jadi $S = N$

Contoh C.2.6:

Buktikan ketaksamaan Cauchy:

Jika $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ dan $b_1, b_2, \dots, b_n \in R$ maka

$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1{}^2 + \dots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + \dots + b_n{}^2)$.

Bukti: sebagai latihan

Contoh C.2.7:

Ketaksamaan Segitiga:

Jika $n \in N$ dan $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ dan $b_1, b_2, \dots, b_n \in R$ maka

$[(a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n)^2]^{1/2} \leq [a_1{}^2 + \dots + a_n{}^2]^{1/2} +$
$[b_1{}^2 + \dots + b_n{}^2]^{1/2}$

Bukti: sebagai latihan

D. Latihan 2

1. Jika $a \leq b$ dan $c < d$ maka buktikan bahwa $a + c < b + d$
2. Jika $a \leq b$ dan $c \leq d$ maka buktikan bahwa $a + c \leq b + d$
3. Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$ buktikan bahwa $0 < ac < bd$
4. Jika $0 < a < b$ dan $0 \leq c \leq d$ buktikan bahwa $0 \leq ac \leq bd$
5. Jika $a < b$ dan $c < d$ buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$
6. Tentukan bilangan a, b, c, d di R sedemikian hingga berlaku, $0 < a < b$ dan $c < d < 0$, maka $ac < bd$ atau $bd < ac$
7. Jika $a, b \in R$ tunjukkan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$
8. Jika $0 \leq a < b$ buktikan bahwa $a^2 \leq ab < b^2$. Berikan sebuah contoh bahwa tidak berlaku $a^2 < ab < b^2$
9. Tunjukkan bahwa jika $0 < a < b$ maka $a < \sqrt{ab} < b$, dan $0 < 1/b < 1/a$.
10. Jika $n \in N$ tunjukkan bahwa $n^2 \geq n$ dan $1/n^2 \leq 1/n$.
11. Tentukan semua bilanga real x sedemikian hingga :
    (a) $x^2 > 3x + 4$
    (b) $1 < x^2 < 4$
    (c) $1/x < x$
    (d) $1/x < x^2$
12. Misalkan $a, b \in R$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $a < b + \varepsilon$ maka:
    (a) Tunjukkan bahwa $a \leq b$,
    (b) Tunjukkan bahwa tidak berlaku $a < b$.

13. Buktikan bahwa $(\frac{1}{2}(a+b))^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ untuk semua $a, b \in R$. Tunjukkan bahwa tanda kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a = b$.
14. Jika $0 < c < 1$, tunjukkan bahwa $0 < c^2 < c < 1$.
15. Jika $1 < c$, tunjukkan bahwa $1 < c < c^2$.
16. Jika $c > 1$, tunjukkan bahwa $c^n \geq c$ untuk semua $n \in N$.
    (gunakan ketidaksamaan Bernoulli's dengan c = 1 + x)
17. Jika $c > 1$, dan $n, m \in N$ tunjukkan, bahwa $c^m > c^n$ jika dan hanya jika $m > n$.
18. Jika $0 < c < 1$, tunjukkan bahwa $c^n \leq c$ untuk semua $n \in N$.
19. Jika $0 < c < 1$, dan $n, m \in N$ tunjukkan, bahwa $c^m < c^n$ jika dan hanya jika $m > n$.
20. Jika $a > 0, b > 0$ dan $n \in N$, tunjukkan bahwa $a < b$ jika dan hanya jika $a^n < b^n$.

BAB III

NILAI MUTLAK

A. Definisi dan Terminologi

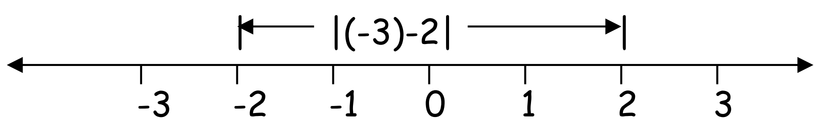
Dari sifat trikotomi U3 dijamin bahwa jika $a \in R$ dan $a \neq 0$, maka tepat satu dari a dan $-a$ yang positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai yang positif dari pasangan $\{a, -a\}$.

Definisi A.3.1 : Jika $a \in R$ nilai mutlak dari a dinotasikan dengan "$|a|$", adalah didefinisikan dengan:

$$|a| = \begin{cases} a, & jika \quad a > 0 \\ a, & jika \quad a = 0 \\ -a, & jika \quad a < 0 \end{cases}$$

Garis bilangan real

Kita telah mengenal interprestasi geometri dari sistem bilangan real adalah garis bilangan real. Interprestasi dari nilai mutlak $|a|$ dari elemen $a \in R$ adalah jarak dari titik a ke titik asal O. Sedangkan secara umum jarak antara elemen a dan b di R adalah $|a - b|$ *(lihat gambar A.3.1).*



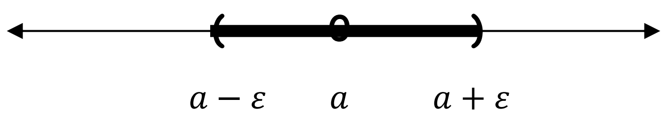
Gambar A.3.1 : Jarak antara $a = -3$ dan $b = 2$

Sekarang akan didiskusikan tentang konsep dekat dengan "close to" suatu bilangan real yang lain. Jika a sebuah bilangan real yang diberikan maka bilangan real x yang dekat dengan a diartikan dengan jarak $|x - a|$ cukup kecil.

Definisi A.3.2 : Misalkan $a \in R$ dan $\varepsilon > 0$, maka ε −neighborhood dari a adalah himpunan $V_\varepsilon(a) = \{x \in R / |x - a| < \varepsilon\}$

Untuk suatu $a \in R$, pernyataan $x \in V_\varepsilon(a)$ ekuivalen dengan pernyataan,

$-\varepsilon < x - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ *(lihat gambar A.3.2)*



Gambar A.3.2: $\varepsilon - neighborhood$ dari a

B. Beberapa Teorema

Teorema B.3.1:

(i) $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$

(ii) $(\forall a \in R). |-a| = |a|$

(iii) $(\forall a, b \in R). |ab| = |a||b|$

(iv) Jika $c \geq 0$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$

(v) $(\forall a \in R). -|a| \leq a \leq |a|$.

Bukti:

(i) jika $a = 0$ maka $-a \neq 0$ begitu juga $|a| \neq 0$.

Sehingga jika $|a| = 0$ maka $a = 0$

Jika $a = 0$ menurut definisi $|a| = 0$

(ii) Jika $a = 0$ menurut definisi $|a| = 0$

Jika $a > 0$ maka $-a < 0$ sehingga $|a| = a = -(-a) = |-a|$

Jika $a < 0$ maka $-a > 0$ sehingga $|a| = -a = |-a|$

(iii) Jika a atau b adalah 0 maka $|ab| = 0 = |a||b|$

Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka $ab > 0$,

sehingga $|ab| = 0 = |a||b|$

Jika $a > 0$ dan $b < 0$ maka $ab < 0$,

sehingga $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$

Jika $a < 0$ dan $b > 0$ maka $ab < 0$,

sehingga $|ab| = -(ab) = (-a)b = |a||b|$

Jika $a < 0$ dan $b < 0$ maka $ab > 0$,

sehingga $|ab| = -(ab) = (-a)(-b) = |a||b|$

(iv) Misalkan $|a| \leq c$ maka $a \leq c$ dan $-a \leq c$,

Karena $-a \leq c$, maka $-c \leq a$,

Sehingga $a \leq c$ dan $-c \leq a$,

Berarti $-c \leq a \leq c$

Konversnya,

Jika $-c \leq a \leq c$ maka $a \leq c$ dan $-c \leq a$,

Sehingga $a \leq c$ dan $-a \leq c$,

Berarti $|a| \leq c$

(v) Jika $c = |a|$ maka menurut teorema $B.3.1(iv)$

$-|a| \leq a \leq |a|$.

Teorema B.3.2 *(Ketidaksamaan Segitiga)*:

Untuk sebarang $a, b \in R$ berlaku $|a + b| \leq |a||b|$

Bukti:

Menurut $T.B.3.1(v)$

Jika $a \in R$ maka dan $-|a| \leq a \leq |a|$

jika $b \in R$ maka $-|b| \leq b \leq |b|$,

dengan menjumlahkan kedua ketidaksamaan tersebut diperoleh,

$(-|a|) + (-|b| \leq a + b \leq |a| + |b|)$ atau

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a||b|$,

sehingga menurut T.B.3.1(iv)

$|a + b| \leq |a||b|$

Corollary B.3.3 *(Akibat teorema B.3.2)*

Untuk sebarang $a, b \in R$, maka

(i) $|a| - |b| \leq |a - b|$

(ii) $|a| - |b| \leq |a| + |b|$

Bukti:

(i) Dari $a = a + 0 = a + \big((-b) + b\big) = \big(a + (-b)\big) + b$

diperoleh $|a| = |a + (-b) + b|$

sehingga $|a| = |a + (-b)| + |b|$ $[T.B.3.2]$

atau $|a| - |b| \leq |a - b|$

(ii) Dengan mengganti b dengan $-b$ pada Ketidaksamaan segitiga

diperoleh $|a + (-b)| \leq |a| + |-b|$

$|a - b| \leq |a| + |b|$

Corollary B.3.4 *(Akibat teorema B.3.2)*

Untuk sebarang $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$, untuk setiap $n \in N$ berlaku

$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

Bukti:

Akan dibuktikan dengan prinsip induksi matematika

Pandang $S = \{n \in N | |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$

(i) untuk $n = 1$

$|a_1| \leq |a_1|$pernyataan benar

sehingga $1 \in S$

(ii) Asumsikan $k \in S$, berarti :

$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$

Akan ditunjukkan bahwa $k + 1 \in S$

$$
\begin{aligned}
|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| &= |(a_1 + a_2 + \cdots a_k) + a_{k+1}| \\
&\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \ (TB.3.2) \\
&\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|
\end{aligned}
$$

sehingga $k + 1 \in S$

Jadi $S = N$.

Teorema B.3.5: Misalkan $a \in R$. Jika x anggota $V_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $x = a$

Bukti :

Akibat dari definisi A.3.1 maka $|x - a| \geq 0$,

$x \in V_\varepsilon(a) = \{x \in R \,/\, |x - a| < \varepsilon\}$ berarti $|x - a| < \varepsilon$,

sehingga diperoleh $0 \leq |x - a| < \varepsilon$,

menurut teorema *B.2.8*, haruslah $x - a = 0$.

Jadi $x = a$.

C. Contoh-Contoh

Contoh C.3.1: $|2| = 2, |-5| = 5, |0| = 0$

Contoh C.3.2: Tentukan himpunan A dari semua bilangan real x yang memenuhi $|2x + 3| < 6$.

Jawab:

Dari teorema *B.3.1.(ii)* diketahui bahwa $x \in A$ jika dan hanya jika $-6 < 2x + 3 < 6$ yang dipenuhi jika dan hanya jika $-9 < 2x < 3$. Kemudian bagi masing-masing suku dengan 2, sehingga diperoleh: $-\frac{9}{2} < x < \frac{3}{2}$

Jadi $A = \left\{x \in R \middle| -\frac{9}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$

Contoh C.3.3: Tentukan Himpunan $B = \{x \in R | |x - 1| < |x|\}$

Penyelesaian:

Kita akan menyelesaikan pertaksamaan $|x - 1| < |x|$ yang terdefinisi pada R. Bentuk nilai mutlak ini berubah tanda di $x = 0$ dan $x = 1$, yang membagi garis bilangan atas tiga bagian. Hal ini bisa kita peroleh berdasarkan definisi harga mutlak. Dengan demikian garis bilangannya dapat diilustrasikan sebagai berikut.

Sehingga untuk menyelesaikan pertidaksamaan tersebut kita tinjau dari ketiga kasus , yaitu

(a) $x \geq 1$; (b) $0 \leq x < 1$ dan (c) $x < 0$

(a) Jika $x \geq 1$

$x - 1 < x$, karena $x - 1 \geq 0$ dan $x \geq 0$

sehingga pertidaksamaan $x - 1 < x$ selalu benar.

Jadi $x \geq 1$

(b) Jika $0 \leq x < 1$

$-(x - 1) < x$, karena $x - 1 < 0$ dan $x \geq 0$

sehingga $2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Jadi $\frac{1}{2} < x < 1$ merupakan anggota dari B.

(c) Jika $x < 0$

Diperoleh $-(x - 1) < -x$, karena $x - 1 < 0$ dan $x < 0$

Yang ekuivalen dengan $1 < 0$

Sehingga tidak ada x yang memenuhi.

Dari (a), (b) dan (c) diperoleh: $B = \{x \in R : x > \frac{1}{2}\}$.

Terdapat metode lain untuk menentukan himpunan B berdasarkan $contoh\ C.2.4$: jika $a \geq 0$ dan $b \geq 0$ maka $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

Dengan demikian ketaksamaan

$|x - 1| < |x| \Leftrightarrow |x - 1|^2 < |x|^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 < x^2$, karena $|a|^2 = a^2$ untuk semua a

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2$

Sehingga $B = \{x \in R : x > \frac{1}{2}\}$.

Contoh C.3.4: Misal fungsi f didefinisikan dengan

$f(x) = {(2x^2 - 3x + 1)}/{(2x - 1)}$ untuk $2 \leq x \leq 3$.

Tentukan suatu konstanta M sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap x yang memenuhi $2 \leq x \leq 3$.

Penyelesaian:

$$|f(x)| = |{(2x^2 - 3x + 1)}/{(2x - 1)}|$$

$$= \frac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x - 1|} \leq M$$

Perhatikan pembilang dan penyebut dari $|f(x)|$, M dapat ditemukan jika $|2x^2 - 3x + 1|$ dan $|2x - 1| \geq B$, untuk suatu konstanta A dan B pada interval $2 \leq x \leq 3$.

Dari batas interval yang memenuhi $2 \leq x \leq 3$ dapat dinyatakan sebagai $2 \leq |x| \leq 3$, (karena $2 \leq x \leq 3$ termuat dalam $2 \leq |x| \leq 3$).

Kemudian dari pertidaksamaan diatas diperoleh,

$|2x^2 - 3x + 1| \leq 2|x|^2 + 3|x| + 1 \leq 2.3^2 + 3.3 + 1 = 28$

karena $|x| \leq 3$ sesuai dengan persyaratan.

Dan $|2x - 1| \geq 2|x| - 1 \geq 2.2 - 1 = 3$, karena $|x| \geq 2$ sesuai dengan persyaratan. Sehingga $|f(x)| \leq \frac{28}{3}$

Dengan demikian dapat diambil $M = 28/3$ (pilihan $M = 28/3$ ini bukan satu-satunya pilihan, sehingga dapat dipilih $M > 28/3$).

Contoh C.3.5: Misal $U := \{x \mid 0 < x < 1\}$, jika $a \in U$ maka dengan mengambil ε yang terkecil dari a dan $1 - a$. $V_\varepsilon(a)$ termuat dalam U. Jadi setiap elemen U mempunyai ε–$neighborhood$ yang termuat dalam U.

Contoh C.3.6: Jika $I = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$ maka untuk suatu $\varepsilon > 0$, ε–$neighborhood$ dari 0, $V_\varepsilon(0)$ memuat titik yang bukan di I, dengan demikian $V_\varepsilon(0)$ tidak termuat di I. Sebagai contoh ambil titik $a = {}^{-\varepsilon}/_{2}$ berada di $V_\varepsilon(0)$ tetapi tidak termuat di I.

Contoh C.3.7: Jika $|x-a|<\varepsilon$ dan $|y-b|<\varepsilon$ maka dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga diperoleh:

$$|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)|$$
$$\leq |(x-a)+(y-b)| < 2\varepsilon$$

dengan kata lain jika x, y masing-masing di dalam $V_\varepsilon(a)$ dan $V_\varepsilon(b)$ maka $x+y$ juga berada didalam $V_{2\varepsilon}(a+b)$.

D. Latihan 3

1. Misalkan $a \in R$, tunjukkan bahwa:
   (a) $|a| = \sqrt{a^2}$;
   (b) $|a|^2 = a^2$.
2. Jika $a, b \in R$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\left|{}^{a}/_{b}\right| = {}^{|a|}/_{|b|}$
3. Jika $a, b \in R$ tunjukkan bahwa $|a+b| = |a| + |b|$ jika dan hanya jika $ab \geq 0$.
4. Jika $x, y, z \in R, x \leq z$, tunjukkan bahwa $x < y < z$ jika dan hanya jika $|x-y| + |y-z| = |x-z|$. Interprestasikan secara geometris.
5. Tentukan semua $x \in R$ yang memenuhi ketidaksamaan berikut:
   (a) $|4x-5| \leq 13$
   (b) $|x^2-1| \leq 3$
   (c) $|x-1| > |x+1|$
   (d) $|x| + |x+1| < 2$
6. Tunjukkan bahwa $|x-a| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

7. Jika $a < x < b$ dan $a < y < b$, tunjukkan bahwa $|x - y| < b - a$. Berikan interprestasi geometrinya.
8. Tentukan dan sketsa himpunan pasangan terurut (x, y) di RxR yang memenuhi:
   (a) $|x| = |y|$
   (b) $|x| + |y| = 1$
   (c) $|xy| = 2$
   (d) $|x| - |y| = 2$
9. Tentukan dan sketsa himpunan pasangan terurut (x, y) di RxR yang memenuhi pertidaksamaan berikut:
   (a) $|x| \leq |y|$
   (b) $|x| + |y| \leq 1$
   (c) $|xy| \leq 2$
   (d) $|x| - |y| \geq 2$
10. Misalkan $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$, dan $a \in R$. Tunjukkan bahwa $V_\varepsilon(a) \cap V_\delta(a)$ dan $V_\varepsilon(a) \cup V_\delta(a)$ adalah γ– *neighborhood dari* a untuk suatu nilai γ yang sesuai.
11. Tunjukkan bahwa jika $a, b \in R$ dan $b \neq a$, maka terdapat ε– *neighborhood* U dari a dan V dari b, sedemikian hingga $U \cap V = \phi$.
12. Tunjukkan bahwa jika $a, b, c \in R$ maka:
    (a) $max\,\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ dan $min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$
    (b) $min\{a, b, c\} = min\{min\{a, b\}, c\}$

BAB IV

SIFAT KELENGKAPAN BILANGAN REAL

A. Definisi dan Terminologi

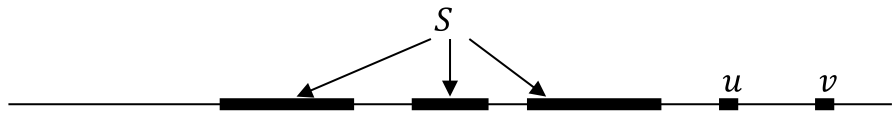
Sifat kelengkapan ini akan membedakan dengan jelas antara bilangan real R dengan bilangan rasional. Selama ini himpunan bilangan rasional Q selalu memenuhi aksioma field, aksioma urutan pada bilangan real. Tetapi kita tahu bahwa $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan kedalam bilangan rasional, sedangkan dengan menggunakan aksioma kelengkapan ini akan ditunjukkan bahwa eksistensi $\sqrt{2}$ dijamin dalam R. sebelum membahas aksioma kelengkapan ini diperlukan beberapa definisi berikut.

Definisi A.4.1: Misalkan $S \subset R$,

(i) $u \in R$ adalah batas atas dari S jika $s \leq u, \forall s \in S$.

(ii) $w \in R$ adalah batas bawah dari S jika $w \leq s, \forall s \in S$

Interprestasi geometrisnya dapat dilihat dalam gambar berikut.



Gambar 4.1: u dan v merupakan batas atas dari S

Dari definisi diatas jelas bahwa jika $S \subset R$ memiliki batas atas, maka akan ada batas atas lain yang tak terhingga banyaknya. Sebab jika $u \in R$ merupakan batas atas dari S maka pasti ada $v \in R$ sedemikian hingga $v > u$. Dengan cara yang sama, jika $S \subset R$ memiliki batas bawah, maka akan ada batas bawah lain yang tak terhingga banyaknya.

Jika terdapat $s \in S$ sedemikian hingga $t < s$ maka t bukan batas atas dari S. Demikian juga jika $z \in R$ dan $s < z$ maka z bukan merupakan batas bawah dari S.

Definisi A.4.2: Misalkan $S \subset R$,

(i) Jika S memiliki batas atas maka S disebut terbatas di atas.

(ii) Jika S memiliki batas bawah maka S disebut terbatas di bawah.

(iii) Jika S memiliki batas atas dan bawah maka S disebut terbatas.

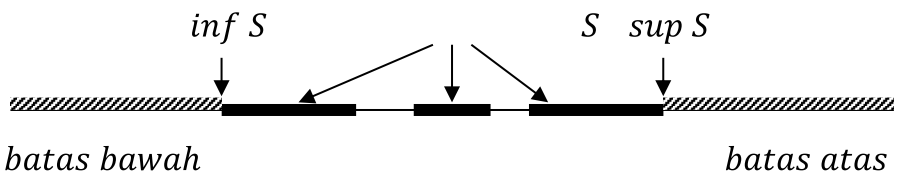
(iv) Jika S tidak memiliki batas atas dan bawah maka S disebut tidak terbatas.

Definisi A.4.3: Misalkan $S \subset R$,

(i) Jika S terbatas di atas, maka suatu batas atas u disebut supremum (atau batas atas terkecil) dari S apabila batas atas u tersebut lebih kecil dari semua batas atas S.

(ii) Jika S terbatas di bawah, maka suatu batas bawah w dari S disebut infimum (atau batas bawah terbesar) dari S, jika batas bawah w tersebut lebih besar dari semua batas bawah S.

Interprestasi geometrisnya dapat dilihat dalam gambar berikut.



Gambar 4.2: infimum S dan supremum S

Aksioma Kelengkapan $(aksioma\ supremum)$

Setiap himpunan bilangan real tidak kosong yang memiliki batas atas, mempunyai supremum.

B. Beberapa Teorema

Lemma B.4.1: Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, u merupakan supremum S jika dan hanya jika u memenuhi:

(i) $s \leq u, \forall s \in S$ dan

(ii) jika $v < u$ maka ada $s' \in S$ sedemikian hingga $v < s'$

Bukti: $(\Rightarrow)$

(i) $u = sup\, S$ berarti $s \leq u, \forall s \in S$ $(D.A.4.3(i))$

(ii) $v < u \Rightarrow u - v > 0$

sehingga $½\,(u - v) > 0$,

ambil $s' = u - ½\,(u - v) \in S$

berarti $s' - v = [u - ½\,(u - v)] - v = ½\,(u - v)$

karena $½\,(u - v) > 0\ maka\ v < s'$

$(\Leftarrow)$

Menurut (i) $s \leq u, \forall s \in S$ jelas bahwa u merupakan batas atas dari S

Andaikan v batas atas yang lain dari S maka $s \leq v, \forall s \in S$

Akan ditunjukkan bahwa $u \leq v$

andaikan $v < u$ maka menurut (ii) ada $s' \in S$ sedemikian hingga $v < s'$

ini bertentangan dengan v batas atas dari S

jadi haruslah $u \leq v$

Dengan demikian u supremum dari S.

Lemma B.4.2: Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \varnothing$, u batas atas dari S merupakan supremum S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

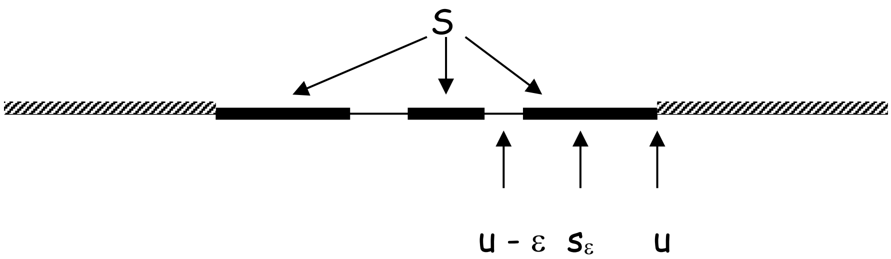
Bukti:

$(\Rightarrow)$ $u = sup\, S$ dan misalkan $\varepsilon > 0$

maka $u - \varepsilon < u$, berarti $u - \varepsilon$ bukan batas atas dari S.

menurut *lemma B.4.1* ada $s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

(lihat gambar 4.3)



Gambar 4.3 : u = supremum S dan $u - \varepsilon < s_\varepsilon$

$(\Leftarrow)$

u batas atas S dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$

Akan ditunjukkan $u = supremum\, S$.

Misalkan v batas yang lain dari u.

Andaikan $v < u$.

Ambil $\varepsilon = u - v > 0$, berarti ada $s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Akibatnya $u - (u - v) = v < s_\varepsilon$,

Kontradikasi dengan pemisalan bahwa v batas atas S.

Sehingga pengandaian harus diingkar, jadi haruslah $u \leq v$, yaitu $u = sup\ S$.

Teorema B.4.3: Setiap himpunan bilangan real tidak kosong yang memiliki batas bawah, mempunyai infimum.

Bukti:

Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, S mempunyai batas bawah.

Misalkan w batas bawah dari S maka $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$

Definisikan $T = \{-s \mid s \in S\}$, jelas bahwa $T \neq \emptyset$.

$w \leq s \Leftrightarrow -s \leq -w$, yang berarti $-w$ batas atas T.

$T \subset R$ dan $T \neq \emptyset$ dan T memiliki batas atas, maka T memiliki supremum (*aksioma kelengkapan).*

Katakan $-p = sup\ T$, berarti $-s \leq -p$ jika $s \in S$.

Misalkan $-q$ batas atas yang lain dari T maka $-p \leq -q$.

Akibatnya untuk $p \leq s$ dan $q \leq p$ jika $s \in S$ sedangkan q batas bawah dari S.

Jadi $p = inf\ S$.

Teorema B.4.4: Bilangan rasional Q tidak lengkap

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa Q tidak lengkap, cukup dibuktikan bahwa ada subset yang tidak kosong dari Q yang memiliki batas atas tetapi tidak mempunyai supremum.

$S = \{s \in Q \mid s \geq 0, x^2 < 3\}$, jelas $S \neq \emptyset$, sebab $12 = 1 < 3$, jadi $1 \in S$

$2^2 = 4 > 3$, sehingga 2 batas atas dari S.

Akibatnya S terbatas di atas.

Menurut aksioma kelengkapan S harus mempunyai supremum.

Misalkan $x = supremum\ S$.

Menurut aksioma urutan $U3$ terdapat tepat satu:

(a) $x^2 < 3$; (b) $x^2 = 3$ atau (c) $x^2 > 3$

(a) jika $x^2 < 3$ dan $x \in Q$ maka $\frac{2x+3}{x+2} \in \mathrm{Q}$

jelas bahwa $\frac{2x+3}{x+2} > x$ (4.1)

$\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^2 - 3 = \frac{x^2-3}{(x+2)^2} < 0$, karena $x^2 - 3 < 0$ dan $(x+2)^2 > 0$

Sehingga $\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^2 < 3$ (4.2)

dari (4.1) dan (4.2) diperoleh $x \neq sup\ S$

(b) jika $x^2 = 3$ maka $x \notin Q$ *(menurut soal no 6 latihan 1)*

(c) jika $x^2 > 3$ dan $x \in Q$ maka $\frac{2x+3}{x+2} \in \mathrm{Q}$

$x - \frac{2x+3}{x+2} = \frac{x^2-3}{x+2} > 0$, karena $x^2 - 3 > 0$ dan $x + 2 > 0$

sehingga $x > \frac{2x+3}{x+2}$ (4.3)

dilain pihak,

$3 - \left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^2 = \frac{3-x^2}{(x+2)^2} < 0$, karena $3 - x^2 < 0$ dan $(x+2)^2 > 0$

sehingga $\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)^2 > 3$ (4.4)

dari (4.3) dan (4.4) diperoleh $x \neq sup\ S$

Dari ketiga kasus di atas $\sup S = x \notin Q$

Jadi Q tidak lengkap.

Teorema B.4.5: Himpunan semua bilangan asli N lengkap.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa N lengkap. Harus ditunjukkan bahwa setiap subset N yang terbatas di atas memiliki supremum.

Ambil sebarang $M \subset N$, dan terbatas di atas.

Berarti M terhingga, dan M memiliki elemen terbesar u.

Akibatnya $u = sup\, M$.

Jadi N lengkap.

C. Contoh-contoh

Contoh C.4.1: Jika $S_1 = \{x \in R \mid x \leq 1\}$ maka 2 batas atas dari S_1, sebab setiap $s \in S_1$ berlaku $s \leq 2$. Dengan cara yang sama dapat diperiksa bahwa $x \geq 1$ merupakan batas atas S_1. Sedangkan 0 bukan batas S_1, sebab ada $1 \in S_1$ sedemikian hingga $1 > 0$. Karena S_1 memiliki batas atas maka S_1 disebut terbatas diatas. Tetapi S_1 memiliki batas bawah, sehingga S_1 disebut tidak terbatas di bawah.

Contoh C.4.2: $S_2 = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$ terbatas. Dengan batas bawah $x \leq 0$ dan batas atas $x \geq 1$.

Contoh C.4.3: $S_3 = \{x \in R^+ \mid x^2 > 2\}$ terbatas di bawah. Dengan batas bawah $x \leq \sqrt{2}$.

Contoh C.4.4: $S_4 = R$ tidak terbatas di atas.

Misalkan a batas atas dari R. Ambil $a > 0$ dan $1 > 0$, sehingga $a + 1 \in R$ sedangkan $a < a + 1$. Kontradiksi dengan a sebagai batas atas R. Dengan cara yang sama R tidak terbatas di bawah. Jadi R tidak terbatas.

Contoh C.4.5: Jika $S_5 = \emptyset$, maka S_5 disebut terbatas di bawah atau terbatas di atas atau tidak terbatas. Karena S_5 himpunan kosong maka tidak memiliki anggota, sehingga setiap bilangan real menjadi batas bawah atau batas atas himpunan S_5 atau bukan batas dari S_5.

Contoh C.4.6: Jika S_6 subset yang tak kosong dari R dan memiliki elemen berhingga (finite) maka S_6 memiliki elemen terbesar u dan elemen terkecil v. Maka $u = sup\, S_6$ dan $v = inf\ S_6$, sedangkan kedua elemen tersebut anggota S_6.

Contoh C.4.7: $S_2 = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$ jelas bahwa 1 batas atas dari S_2 . Dapat ditunjukkan bahwa $1 = sup\, S_2$. Sebab, jika $v < 1$ ada $s' \in S_2$ sedemikian hingga $v < s'$, sehingga v bukan batas atas S_2. Jadi $1 = sup\, S_2$. (Menurut $lemma\ B.4.1$). Dengan cara yang sama $0 = inf\ S_2$, sedangkan 0 dan 1 anggota S_2.

Contoh C.4.8: $S_3 = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$ mempunyai supremum 1 dan infimum 0, dan masing-masing bukan anggota S_3.

Contoh C.4.9: Setiap bilangan real menjadi batas atas dari $\emptyset$, sehingga $\emptyset$ tidak memiliki supremum. Dengan cara yang sama $\emptyset$ tidak memiliki supremum.

Catatan:

(1) batas atas dan batas bawah suatu himpunan S dapat di muat dalam S atau di luar S.

(2) supremum dan infimum dari S dapat di dalam atau di luar S.

(3) jika $supremum\ S$ dimuat dalam S sering disebut maksimum S, sedangkan $infimum$ yang dimuat S disebut minimum S.

D. Latihan 4

1. Misalkan $S_1 = \{x \in R \mid x \geq 4\}$. Tunjukkan secara cermat bahwa S_1 memiliki batas bawah dan tidak memiliki bats atas. Tunjukkan bahwa $inf\ S_1 = 1$.
2. Misalkan $S_2 = \{x \in R \mid x > 4\}$. Apakah S_2 memiliki batas bawah? Apakah S_2 memiliki batas atas? Apakah $sup\ S_2$ ada? Apakah $inf\ S_2$ ada? Buktikan pernyataan saudara.
3. Misalkan $S_3 = \{ 1/n \mid n \in N \}$. Tunjukkan bahwa $sup\ S_3 = 1$ dan $inf\ S_3 \geq 0$.
4. Misalkan $S_4 = \left\{ \frac{1-(-1)^n}{n} \mid n \in N \right\}$. Tentukan $sup\ S_4$ dan $inf\ S_4$.
5. Misalkan S subset yang tidak kosong dari R dan terbatas di bawah. Buktikan bahwa $inf\ S = -sup\ \{-s \mid s \in S\}$.
6. Jika S subset dari R yang memuat batas atasnya sendiri, maka tunjukkan batas atas tersebut merupakan $sup\ S$.
7. Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, tunjukkan $u \in R$ batas atas dari S merupakan $supremum\ S$ jika dan hanya jika untuk setiap $t \in R$ dan $t > u$ maka $t \notin S$.
8. Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$. Tunjukkan bahwa jika $u = sup\ S$, maka untuk setiap $n \in N$, $u - 1/n$ bukan batas atas S, tetapi $u + 1/n$ batas atas dari S.
9. Jika $sup\ S = inf\ S$. Apakah yang dapat dikatakan tentang S?
10. Tunjukkan jika A dan B subset R dan terbatas, maka $A \cup B$ terbatas. Tunjukkan bahwa $sup\ (A \cup B) = sup\ \{sup\ A, sup\ B\}$

11. S adalah terbatas di R, dan $S_0 \subset S$ dan $S_0 \neq \emptyset$. Tunjukkan bahwa $inf\ S \leq inf\ S_0 \leq sup\ S_0 \leq sup\ S$.
12. Misalkan $S \subset R$ dan $s* = sup\ S$ termuat di S. Jika $u \notin S$, tunjukkan bahwa $sup\ (S \cup \{u\}) = sup\ (s*, u)$
13. Tunjukkan himpunan $S \subset R$ yang finit dan tidak kosong memuat supremum dan infimumnya. [Petunjuk: $gunakan\ induksi$]
14. Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, tunjukkan w merupakan $inf\ S$ jika dan hanya jika w memenuhi: (i) $w \leq s, \forall s \in S$ dan (ii) jika $w < z$ maka ada $s' \in S$ sedemikian hingga $s' < z$.
15. Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, tunjukkan bahwa w batas bawah dari S merupakan inf S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sedemikian hingga $s_\varepsilon < w + \varepsilon$.

BAB V

BEBERAPA KONSEKUENSI AKSIOMA KELENGKAPAN

A. Definisi dan Terminologi

Pengembangan dari aksioma kelengkapan ini dimulai pada akhir abad XIX. Sehingga melahirkan beberapa konsekuensi dari aksioma kelengkapan ini diantaranya adalah supremum dan infimum suatu himpunan memenuhi sifat aljabar. Ketunggalan supremum dan infimum suatu himpunan. Ketidak terbatasan bilangan Asli akibat dari sifat Archimedes. Eksistensi $\sqrt{2}$ dalam R. Kepadatan bilangan rasional dan irasional dalam R. Sifat kelengkapan equivalen dengan $sifat\ Dedekind's$.

Definisi A.5.1: Misalkan $S \subset R, T \subset R$ dan $p \in R$ maka

(i) $-S = \{-s \mid s \in S\}$

(ii) $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$

(iii) $P + S = \{p + s \mid s \in S\}$

(iv) $pS = \{ps \mid s \in S\}$

Definisi A.5.2: Misalkan $S \subset R$, dan f fungsi yang bernilai real maka $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$.

B. Beberapa Teorema

Teorema B.5.1: Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$,

(i) jika S terbatas di atas maka $sup\ S$ tunggal.

(ii) jika S terbatas di bawah maka $inf\ S$ tunggal.

Bukti:

(i) S terbatas di atas maka S memiliki supremum

Akan dibuktikan $sup\ S$ tunggal.

Katakan u dan u' masing-masing $sup\ S$

$u = sup\ S$ maka u merupakan batas atas S

$u' = sup\ S$ maka u' merupakan batas atas S

$u = sup\ S$ dan u' batas atas S maka $u \leq u'$ (5.1)

$u' = sup\ S$ dan u batas atas S maka $u' \leq u$ (5.2)

dari (5.1) dan (5.2) diperoleh $u = u'$

(ii) S terbatas di bawah maka S memiliki infimum

Akan dibuktikan infimum S tunggal

Misalkan w dan w' infimum dari S

$w = inf\ S$ maka w merupakan batas bawah S

$w' = inf\ S$ maka w' merupakan batas bawah S

$w = inf\ S$ dan w' batas bawah S maka $w' \leq w$ (5.3)

$w' = inf\ S$ dan w batas bawah S maka $w \leq w'$ (5.4)

dari (5.3) dan (5.4) diperoleh $w = w'$

Teorema B.5.2: Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, dan S terbatas maka:

(i) $inf\ S = -sup\ -S$

(ii) $sup\ S = -inf\ -S$

Bukti:

(i) $w = inf\ S$ maka $w \leq s, \forall s \in S$

dari $w \leq s$ maka $-s \leq -w, \forall s \in S$

Akibatnya –w merupakan batas atas $-S$ (5.5)

$w = inf\ S$ maka $\varepsilon > 0$ ada $s' \in S$ sedemikian hingga $w + \varepsilon > s'$

$w + \varepsilon > s'$ maka $-s' > -w - \varepsilon$

sehingga untuk $\varepsilon > 0$ ada $-s' \in S$ sedemikian hingga

$-s' > -w - \varepsilon$ (5.6)

dari (5.5)dan (5.6) diperoleh $-w = sup -S$ atau $w = -sup -S$

Jadi $inf\ S = -sup -S$

(ii) Bukti sebagai latihan

Teorema B.5.3: Misalkan $S \subset R, T \subset R$ dan terbatas maka

(i) $sup\ (S + T) = sup\ S + sup\ T$

(ii) $inf\ (S + T) = inf\ S + inf\ T$

Bukti:

(i) Misalkan $x = sup\ S$ dan $y = sup\ T$

$x = sup\ S$ maka $s \leq x, \forall s \in S$

$y = sup\ T$ maka $t \leq y, \forall t \in T$

$(s + t) \leq (x + y), \forall (s + t) \in S + T$

sehingga $x + y$ batas atas $S + T$ (5.7)

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

Karena $x = sup\ S$ maka ada $s' \in S$ sedemikian hingga

$$s' > x - \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $y = sup\ T$ maka ada $t' \in T$ sedemikian hingga $t' > y - \frac{\varepsilon}{2}$

sehingga $s' + t' > x + y - \varepsilon$ (5.8)

dari (5.7) dan (5.8) diperoleh $x + y = sup\ (S + T)$

jadi sup $(S + T) = sup\ S + sup\ T$

(ii) Bukti sebagai latihan

Teorema B.5.4: Misalkan $S \subset R$ terbatas dan $p \in R$ maka

(i) $sup\ (p + S) = p + sup\ S$

(ii) $inf\ (p + S) = p + inf\ S$

Bukti :

(i) $u = sup\ S$ maka $s \leq u, \forall s \in S$

Sehingga $p \in R$ maka $p + s \leq p + u, \forall s \in S$

Berarti $p + u$ batas atas dari $p + S$ (5.9)

Akibatnya $sup\ (p + S) \leq p + u$

Misalkan v batas atas lain dari $p + S$ maka $p + s \leq v, \forall s \in S$

Sehingga $s \leq v - p, \forall s \in S$

Karena $u = sup\ S$ maka $u \leq v - p$ atau $p + u \leq v$

Berarti $p + u \leq v$ dan v batas atas $p + S$ (5.10)

Dari (5.9)dan (5.10) diperoleh $sup\ (p + S) = p + u = p + sup\ S$

(ii) Bukti (ii) analog (i), sebagai latihan

Teorema B.5.5: Misalkan $S \subset R$ terbatas dan $p \geq 0$ maka

(i) $sup\ (pS) = p\ sup\ S$

(ii) $inf\ (pS) = p\ inf\ S$

Bukti:

(i) Jika $p = 0$ maka $sup\ pS = sup\ \{0\} = 0 = 0\ sup\ S$

Jika $p > 0$, misalkan $u = sup\ S$ maka $s \leq u, \forall s \in S$

Sehingga $ps \leq pu, \forall s \in S$ atau $p\ s \leq p\ u, \forall\ ps \in pS$

Berarti pu batas atas dari pS (5.11)

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{\varepsilon}{p} > 0$

Karena $u = sup\ S$ maka ada $s' \in S$ sedemikian hingga $s' > u - \frac{\varepsilon}{p}$

Sehingga $ps' > p\,u - \varepsilon$

Akibatnya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $ps' \in S$ sedemikian hingga $ps' > pu - \varepsilon$ (5.12)

Dari (5.11) dan (5.12) diperoleh $pu = sup\ pS$

Jadi $sup\ pS = p\ sup\ S$

(ii) Bukti sebagai latihan

Teorema B.5.6: Misalkan $S \subset R$ terbatas dan $p \leq 0$ maka

(i) $sup\ (pS) = p\ inf\ S$

(ii) $inf\ (pS) = p\ sup\ S$

Bukti:

(i) Jika $p = 0$ maka sup $pS = sup\ \{0\} = 0 = 0\ inf\ S$

Jika $p < 0$, misalkan $w = inf\ S$ maka $w \leq s, \forall s \in S$

dan $ps \leq pw, \ \forall ps \in pS$

berarti pw batas atas dari pS (5.13)

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{\varepsilon}{p} > 0$

Karena $w = inf\ S$ maka ada $s' \in S$ sedemikian hingga $s' < u + \frac{\varepsilon}{p}$

Sehingga $ps' > pw - \varepsilon$

Akibatnya untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $ps' \in S$ sedemikian hingga $ps' > pw - \varepsilon$ (5.14)

Dari (5.13) dan (5.14) diperoleh $pw = sup\ pS$

Jadi $sup\ pS = p\ inf\ S$

(ii) Bukti sebagai latihan

Teorema B.5.7: *(sifat Archimedes)* jika $x \in R$, maka terdapat $n_x \in N$ sedemikian hingga $x < n_x$.

Bukti:

Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan konklusinya salah, maka x adalah batas atas dari N.

Menurut aksioma kelengkapan N harus mempunyai supremum di R.

Misalkan $u = sup\, N$ dan $u \in R$,

Karena $u - 1 < u$ berarti ada $k \in N$ sedemikian hingga $u - 1 < k$.

Tetapi $u < k + 1$ dan karena $k + 1 \in N$.

Ini kontradiksi dengan $u\ batas\ atas\ N$.

Jadi jika $x \in R$, maka terdapat $\mathrm{n_x} \in N$ sedemikian hingga $x < n_x$.

Corollary B.5.8: N tak terbatas di atas

Bukti:

Andaikan N terbatas di atas.

Maka ada $x \in R$ yang merupakan batas atas, yaitu $n \leq x$, $\forall n \in N$.

Kontradiksi dengan sifat Archimedes.

Jadi N tak terbatas di atas.

Corollary B.5.9: Jika $y, z \in R^+$, maka:

(i) terdapat $n \in N$ sedemikian hingga $z < ny$

(ii) terdapat $n \in N$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n} < y$

(iii) terdapat $n \in N$ sedemikian hingga $n - 1 \leq z < n$

Bukti:

(i) Karena y dan z bilangan real positif maka $x = \frac{z}{y} > 0$.

Berarti ada $n \in N$ sedemikian hingga $x = \frac{z}{y} < n$.

Sehingga $z < ny$

(ii) Jika pada (i) $z = 1$ maka diperoleh $1 < ny$.

Yang berimplikasi $\frac{1}{n} < y$

Karena $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in N$ maka $0 < \frac{1}{n} < y$

(iii) Didefinisikan $M = \{m \in N \mid z < m\}$

jelas bahwa $M \neq \emptyset$, karena z bilangan real positif.

Misalkan n elemen terkecil dari M.

Maka $n - 1 \notin M$, sehingga $n - 1 \leq z < n$

Teorema B.5.10: Terdapat bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$

Bukti:

$S = \{ s \in R \mid s \geq 0, s^2 < 2 \}$, jelas $S \neq \emptyset$, sebab $1^2 = 1 < 2$, jadi $1 \in S$

$2^2 = 4 > 2$, sehingga 2 batas atas dari S.

Akibatnya S terbatas di atas.

Menurut aksioma kelengkapan S harus mempunyai $supremum$.

Untuk membuktikan bahwa Terdapat bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$, cukup dibuktikan bahwa $sup\, S$ di R.

Misalkan $x = \sup S$.

(a) jika $x^2 < 2$ dan $\frac{3x+2}{x+3} \in R$

$\frac{3x+2}{x+3} - x = \frac{3x+2-x(x+3)}{x+3} = \frac{2-x^2}{x+3} > 0$, karena $2 - x^2 > 0$, dan $x + 3 > 0$.

jelas bahwa $\frac{3x+2}{x+3} > x$ (5.15)

$\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)^2 - 3 = \frac{7(x^2-2)}{(x+3)^2} < 0$,karena $7(x^2 - 2) < 0$ dan $(x + 3)^2 > 0$

sehingga $\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)^2 < 3$ (5.16)

dari (5.15) dan (5.16) diperoleh $x \neq sup\ S$

(b) jika $x^2 > 2$ dan $\frac{3x+2}{x+3} \in R$

$x - \frac{3x+2}{x+3} = \frac{x^2-2}{x+3} > 0$, karena $x^2 - 2 > 0$ dan $x + 3 > 0$

sehingga $x > \frac{3x+2}{x+3}$ (5.17)

dilain pihak,

$3 - \left(\frac{3x+2}{x+3}\right)^2 = \frac{7(2-x^2)}{(x+3)^2} < 0$, karena $7(2 - x^2) < 0$ dan$(x+3)^2 > 0$

sehingga $\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)^2 > 3$ (5.18)

dari (5.17) dan (5.18) diperoleh $x \neq sup\ S$

dari dua kasus tersebut maka tidak mungkin $x^2 < 2$ dan $x^2 > 2$, sehingga menurut $aksioma\ urutan\ U3$ haruslah $x^2 = 2$.

Teorema B.5.9 $(sifat\ kepadatan\ bilangan\ rasional\ di\ R)$: Jika x dan y bilangan real dengan $x < y$ maka terdapat bilangan rasional r sedemikian hingga $x < r < y$.

Bukti:

Dengan tanpa mengurangi keumuman ambil sebarang $x > 0$.

Karena $x < y$ maka $y - x > 0$, sehingga $\frac{1}{y-x} > 0$

Dengan sifat Archimedes ada $n \in N$ sedemikian hingga $\frac{1}{y-x} < n$

Sehingga $1 < ny - nx$ atau $1 + nx < ny$ (5.19)

$x > 0$ maka $nx > 0$

menurut $corollary\ B.5.9(iii)$ ada $m \in N$ sedemikian hingga

$m - 1 \leq nx < m$

sehingga $m \leq nx + 1 < m + 1$ $\qquad (5.20)$

dari (5.19) dan (5.20) diperoleh $m \leq nx + 1 < ny$ atau $m < ny$

dari $nx < m$ dan $m < ny$ maka $nx < m < ny$

sehingga $x < \frac{m}{n} < y$

dengan mengambil $r = \frac{m}{n}$ jelas r bilangan rasional dan memenuhi $x < r < y$.

Teorema ini menunjukkan bahwa bilangan rasional padat di R $(dense\ every\ where)$ artinya diantara dua bilangan real berbeda ada tak hingga banyaknya bilangan rasional.

Corollary B.5.10$(sifat\ kepadatan\ bilangan\ irasional\ di\ R)$**:** Jika x dan y bilangan real dengan $x < y$ maka terdapat bilangan irasional z sedemikian hingga $x < z < y$.

Bukti:

$x < y$ maka $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$

Akibat dari teorema kepadatan dari dua bilangan real $\frac{x}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{y}{\sqrt{2}}$ dan $r \neq 0$.

Diperoleh $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$ sehingga $x < r\sqrt{2} < y$

Dengan mengambil $z = r\sqrt{2}$ yang merupakan bilangan irasional maka $x < z < y$

Teorema ini juga menunjukkan bahwa bilangan irasional padat dimana-mana.

C. Contoh-contoh

Contoh C.5.1: Misalkan $S \subset R$, dan f dan g fungsi yang bernilai real, $f(S)$ dan $g(S)$ terbatas di R.

(i) Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in S$ maka $sup\ f(S) \leq sup\ g(S)$

Misalkan $u = sup\ g(S)$ maka $g(x) \leq u$ untuk setiap $x \in S$

Karena $f(x) \leq g(x)$ maka $f(x) \leq g(x) \leq u$ untuk setiap $x \in S$

Sehingga u merupakan batas atas dari $f(S)$

Jadi $sup\ f(S) \leq u = sup\ g(S)$

(ii) Jika $f(x) \leq g(y)$ untuk setiap $x, y \in S$ maka $sup\ f(S) \leq inf\ g(S)$

Ambil $y \in S$ karena $f(x) \leq g(y)$ untuk semua $x \in S$ maka $g(y)$ merupakan batas atas $f(S)$

sehingga $sup\ f(S) \leq g(y)$

karena $sup\ f(S) \leq g(y)$ untuk semua $y \in S$ maka $sup\ f(S)$ merupakan batas bawah dari $g(S)$

Jadi $sup\ f(S) \leq inf\ g(S)$

Contoh C.5.2: $S = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$ dan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x$.

Jelas bahwa $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in S$.

$f(S) = \{f(x) : x \in R\} = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$

$g(S) = \{g(x) : x \in R\} = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$

sehingga $sup\ f(S) = 1;\ sup\ g(S) = 1;\ inf\ f(S) = 0$ dan $inf\ g(S) = 0$

dapat dilihat bahwa $sup\ f(S) \leq sup\ g(S)$ (*contoh* $C.5.1(i)$ *berlaku)*

sedangkan contoh $C.5.1(ii)$ tidak berlaku (mengapa?)

D. Latihan 5

1. Gunakan $sifat\ Archimedes$ dan $corollary\ B.5.9(ii)$ untuk membuktikan bahwa $inf\ \{1/n : n \in N\} = 0$

2. Misalkan $S = \{1/n - 1/m \mid n, m \in N\}$. Tentukan $sup\ S$ dan $inf\ S$.

3. Misalkan S subset yang tidak kosong dari R. Buktikan bahwa jika $u \in R$ memenuhi sifat:

   (a) untuk setiap $n \in N, u - 1/n$ bukan batas atas S, dan

   (b) untuk setiap $n \in N, u + 1/n$ batas atas S, maka $u\ sup\ S$ *(konvers dari latihan IV no 8)*

4. Misalkan S subset yang tidak kosong dari R dan $f: S \rightarrow R$ memiliki range terbatas di R. Tunjukkan bahwa jika $p \in R$ teorema $B.5.4$ mengimplikasikan:

   (a) $sup\ \{p + f(x) \mid x \in R\} = p + sup\ \{f(x) \mid x \in R\}$

   (b) $inf\ \{p + f(x) \mid x \in R) = p + inf\ \{f(x) \mid x \in R\}$

5. Misalkan $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, dan f dan g didefinisikan pada S dan memiliki range terbatas di R. Tunjukkan bahwa:

   (a) $sup\ \{f(x) + g(x) \mid x \in S\} \leq sup\ \{f(x) \mid x \in S\} + sup\ \{g(x) \mid x \in S\}$

   (b) $inf\ \{f(x) \mid x \in S\} + sup\ \{g(x) \mid x \in S\} \leq inf\ \{f(x) + g(x) \mid x \in S\}$

   berikan contoh bahwa setiap ketidaksamaan dapat sama atau ketidaksamaan kuat.

6. Misalkan $S = T = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$, didefinisikan $h: SxT \rightarrow R$ dengan $h(x, y) = 2x + y$.

(a) untuk setiap $x \in S$ tentukan $f(x) = sup\ \{h(x,y) \mid y \in T\}$ maka tentukan $inf\ \{f(x) \mid x \in S\}$

(b) untuk setiap $y \in T$ tentukan $g(x) = inf\ \{h(x,y) \mid x \in S\}$ maka tentukan $sup\ \{g(y) \mid y \in T\}$

bandingkan dengan hasil perhitungan (a)

7. Hitung seperti soal 6 dengan fungsi $h: SxT \to R$ didefinisikan dengan

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & jika \quad x < y \\ 1 & jika \quad x \geq y \end{cases}$$

8. S dan T himpunan yang tak kosong dan misalkan $h : SxT \to R$ memiliki range terbatas di R. Misalkan $f : S \to R$ dan $g : T \to R$ didefinisikan dengan :

$f(x) = sup\ \{h(x,y) \mid y \in T\}$; $g(y) = inf\ \{h(x,y) \mid x \in S\}$

Buktikan bahwa : $sup\ \{ g(y) \mid y \in T\} \leq inf\ \{ f(x) \mid x \in S\}$

9. S dan T himpunan yang tak kosong dan misalkan $h : SxT \to R$ memiliki range terbatas di R. Misalkan $f: S \to R$ dan $g: T \to R$ didefinisikan dengan :

$f(x) = sup\ \{h(x,y) \mid y \in T\}$; $g(y) = sup\ \{h(x,y) \mid x \in S\}$

Buktikan bahwa berlaku $Principle\ of\ Iterated\ suprema$:

$Sup\ \{h(x,y) \mid x \in S, y \in T\} = sup\ \{f(x) \mid x \in S\} =$
$sup\ \{ g(y) \mid y \in T\}$

10. Diberikan $x \in R$ tunjukkan bahwa ada $n \in Z$ tunggal sedemikian hingga $n - 1 \leq x < n$

11. Jika $y > 0$ tunjukkan bahwa ada $n \in N$ tunggal sedemikian hingga $1/2^n > y$

12. Modifikasi argumen $teorema\, B.5.10$ untuk menunjukkan ada bilangan real positif y sedemikian hingga $y^2 = 3$
13. Modifikasi argumen $teorema\, B.5.10$ tunjukkan bahwa jika $a > 0$ ada bilangan real positif z sedemikian hingga $z^2 = a$
14. Modifikasi argumen $teorema\, B.5.10$ tunjukkan bahwa ada bilangan real positif u sedemikian hingga $u^3 = 2$
15. Lengkapi bukti $teorema\, kepadatan$ dengan mengubah hipotesisnya $x > 0$.
16. Jika $u > 0$ dan $x < y$, tunjukkan ada bilangan rasional r sedemikian hingga $x < ru < y$. disini $\{ru : r \in Q\}$ padat di R.

$< blank >$

BAB VI

INTERVAL DAN DESIMAL

A. Definisi dan Terminologi

Suatu himpunan disebut terbatas jika himpunan tersebut mempunyai batas bawah dan batas atas, jika tidak demikian, maka himpunan itu disebut himpunan tak terbatas. Ide interval ini secara alami dihasilkan dari adanya relasi urutan di *R*. Suatu interval dapat dipandang sebagai himpunan titik-titik di garis real (R).

Definisi A.6.1: Jika $a, b \in R$ dan $a \leq b$, maka:

(i) $(a, b) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}: a < \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$ disebut interval buka.

(ii) $[a, b] = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}: a \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$ disebut interval tutup.

(iii) $[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$ dan

(iv) $(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$ disebut interval setengah buka (setengah tutup)

(v) $(a, a) = \emptyset$ (interval yang merupakan himpunan kosong) dan $[a, a] = \{a\}$ merupakan singleton.

Untuk interval $(i), (ii), (iii)$ dan *(iv)*, a dan b masing-masing disebut titik ujung interval dan keempat interval mempunyai panjang $b - a$. Untuk interval $(i), (ii), (iii), (iv)$ dan (v) disebut interval terbatas.

Definisi di atas dapat di ilustrasikan secara geometris sebagai berikut:

Interval buka (a, b)

Interval tutup $[a, b]$

Interval setengah buka $[a, b)$

Interval setengah buka $(a, b]$

Gambar 6.1: interval terbatas

Definisi A.6.2: Jika $a \in R$, maka:

(i) $(a, \infty) = \{x \in R: x > a\}$ dan

(ii) $(-\infty, a) = \{x \in R: x < a\}$ disebut sinar buka (interval buka tak hingga)

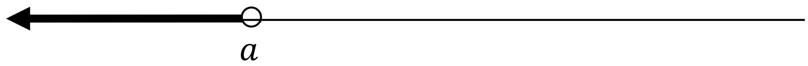
(iii) $[a, \infty) \coloneqq \{x \in R: x > a\}$ dan

(iv) $(-\infty, a] = \{x \in R: x < a\}$ disebut sinar tutup (interval tutup tak hingga)

Untuk (i), (ii), (iii) dan (iv) a disebut titik ujung interval. Jika himpunan R disajikan dalam bentuk interval maka dapat ditulis $R = (-\infty, \infty)$. Dalam hal ini tidak ada titik ujungnya. Untuk interval tak terbatas digunakan lambang -∞ dan ∞ yang disepakati hanya sebagai notasi dan keduanya bukan anggota R. Interval satuan adalah $I = [0, 1] = \{x \in R: 0 \leq x \leq 1\}$.

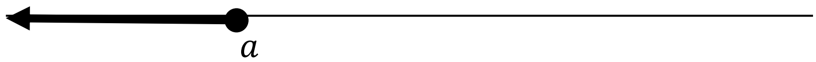
Dari definisi $A.6.2$. dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Interval buka tak hingga (a, ∞)



Interval buka tak hingga $(-\infty, a)$

Interval tutup tak hingga $[a, \infty)$



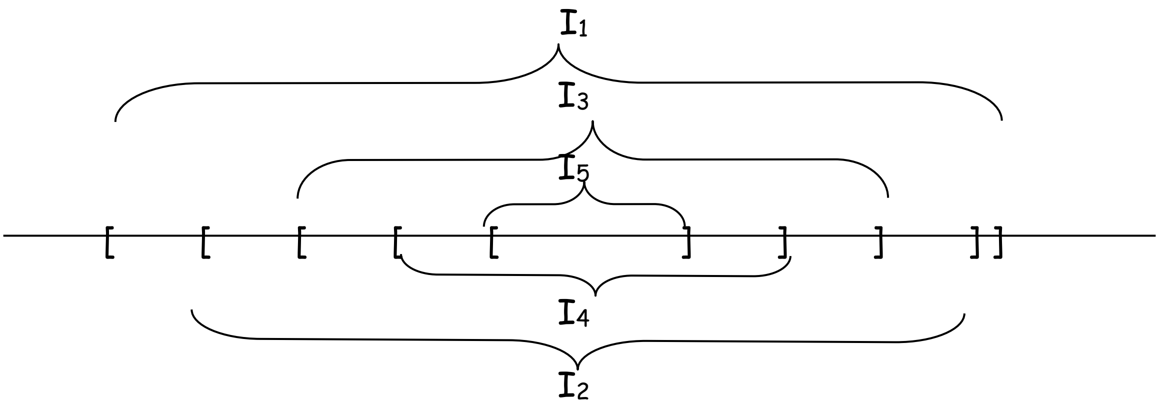
Interval tutup tak hingga $(-\infty, a)$

Gambar 6.2: interval tak terbatas

Definisi A.6.3: Suatu barisan interval I_n untuk setiap $n \in N$ disebut bersarang (nested) jika memenuhi syarat:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

Definisi di atas dapat diillustrasikan sebagai berikut:



Gambar 6.3: interval bersarang

Bentuk Biner

Misalkan $x \in [0,1]$, akan dinyatakan x dalam barisan "0 dan 1" sebagai berikut:

Pertama, interval $[0,1]$ dibagi menjadi $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ dan $\left[\frac{1}{2},1\right]$,

Jika $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ maka $a_1 = 0$ dan jika $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ maka $a_1 = 1$,

sehingga diperoleh pertidaksamaan $\frac{0}{2} \le x \le \frac{0}{2} + \frac{1}{2}$ $atau$ $\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Kedua, Sub interval kiri dibagi dua menjadi $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ dan $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

jika $x \in \left[0,\frac{1}{4}\right]$ maka $a_2 = 0$ dan jika $x \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ maka $a_2 = 1$,

sehingga diperoleh pertidaksamaan

$\frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} \le x \le \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^2}$ $atau$ $\frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \le x \le \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$

sub interval kanan dibagi dua menjadi $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ dan $\left[\frac{3}{4},1\right]$

jika $x \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ maka $a_2 = 0$ dan jika $x \in \left[\frac{3}{4},1\right]$ maka $a_2 = 0$

sehingga diperoleh pertidaksamaan

$\frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} \le x \le \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^2}$ $atau$ $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} \le x \le \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$

Proses tersebut diteruskan hingga ke-n, dan jika x termuat dalam sub interval kiri maka $a_n = 0$ dan jika x termuat dalam sub interval kanan maka $a_n = 1$. Melalui cara ini didapatkan suatu barisan $a_1, a_{2,} \dots, a_n, \dots$ yang terdiri dari "$0\ dan\ 1$" yang berkorespondensi satu-satu dengan barisan tersarang dengan elemen sekutu x. Untuk setiap n diperoleh ketidaksamaan:

$$\frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \le x \le \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

Jika x adalah "titik bagi dua" pada proses ke-n maka $x = \frac{m}{2^n}$ dengan m ganjil. Pada kasus ini dapat dipilih sub interval kiri atau kanan, sehingga $a_n = 0$ atau $a_n = 1$, namun jika sub intervalnya telah dipilih maka sub interval berikutnya pada proses selanjutnya dapat ditentukan.

Misalkan dipilih subinterval kiri sehingga $a_n = 0$.

x adalah titik ujung kanan dari sub interval berikutnya, sehingga $a_k = 1$ untuk $k \geq n + 1$. Sebaliknya jika dipilih sub interval kanan sehingga $a_n = 1$ maka $a_k = 0$ untuk $k \geq n + 1$.

Untuk $x = ½$ maka barisan yang mungkin untuk x adalah $0, 1, 1, 1, \ldots$ atau $1, 0, 0, 0, \ldots$, sehingga representasi biner dari x adalah $(0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1}\, 0111 \ldots)_2$ $atau$ $(0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1}\; 1000 \ldots)_2$.

Bentuk Desimal

Secara geometris bentuk desimal serupa dengan bentuk biner, hanya interval yang ada dibagi menjadi 10 subinterval. Jika $x \in [0, 1]$ maka x akan termuat dalam interval $\left[\frac{b_1}{10}, b_1 + \frac{1}{10}\right]$ dengan $b_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Jika x adalah salah satu titik batas, maka b_1 akan mempunyai dua nilai dan dipilih hanya satu, sehingga $\frac{b_1}{10} \leq x \leq \frac{b_1}{10} + \frac{1}{10}$ dengan $b_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Jika proses dilanjutkan dengan membagi subinterval yang dipilih menjadi *10* subinterval sehingga didapat, $b_1\, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ dengan $0 \leq \mathrm{b}_n \leq 9$ untuk setiap $n \in N$.

Sehingga $\frac{b_1}{10^1}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots+\frac{b_n}{10^n}\leq x\leq\frac{b_1}{10^1}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots+\frac{b_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}$ untuk setiap $n\in N$. Dengan demikian representasi desimal x adalah 0, $b_1\,b_2,\ldots,b_n,\ldots$ dan jika $x\geq 1$ dan $\mathrm{B}\in\mathrm{N}$ maka $B\leq x<B+1$ dan x adalah B, $b_1\,b_2,\ldots,b_n,\ldots$ Dengan $x - B$ adalah bentuk desimal.

Bentuk desimal dari $x\in[0,1]$ adalah tunggal kecuali x adalh titik batas pada setiap subinterval pada suatu proses.

Misalkan $x=\frac{m}{10^n}$ untuk suatu $n,m\in N, 1\leq m\leq 10^n$ diasumsikan m *bukan kelipatan* 10.

Dengan demikian ada dua kemungkinan yaitu $b_k=9$ untuk $\mathrm{k}\geq\mathrm{n}+1$ maka $x=0,b_1b_2\ \ldots\ b_n\ 999\ldots$ atau $x=0,b_1b_2\ \ldots\ b_n+1\ 000\ldots\ldots$

Misalkan $x=\frac{1}{2}$ maka representasinya adalah $0{,}49999\ldots$ atau $x=0{,}5000\ldots$

Desimal $B,b_1b_2\ \ldots\ b_n\ \ldots$ dinamakan periodik jika terdapat bilangan asli k dan m sehingga $b_n=b_{n+m}$ untuk setiap $n>k$. Artinya blok digit $\mathrm{a_k a_{k+1}\ldots a_{k+m-1}}$ terulang mulai digit ke-k. Bilangan m terkecil dinamakan periode desimal.

Misalnya $\frac{19}{88}=0{,}2159090\ldots 90\ldots$ mempunyai periode *2* dengan blok pengulangan *90* mulai dari digit ke-4.

Bilangan real positif merupakan bilangan rasional jika dan hanya jika desimalnya periodik.

B. Beberapa Teorema

Teorema B.6.1: Jika $I_n = [a_n, b_n], n \in N$, adalah barisan interval tutup terbatas tersarang maka ada bilangan $\xi \in \mathrm{R}$ sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in N$.

Bukti:

Karena I_n barisan interval tutup terbatas tersarang maka $I_n \subseteq I_1$ untuk semua $n \in N$.

Sehingga $\mathrm{a_n} \leq \mathrm{b}$ untuk setiap $n \in N$.

Berarti $\{ a_n \mid \mathrm{n} \in \mathrm{N} \}$ terbatas diatas.

Karena $\{ a_n \mid \mathrm{n} \in \mathrm{N} \} \neq \emptyset$ dan terbatas di atas maka mempunyai supremum.

Misalkan $\xi = sup \{ a_n \mid n \in N \}$.

Jelas $a_n \leq \xi untuk\ setiap\ n \in N$

Sekarang di klaim bahwa $\xi \leq b_n\ untuk\ setiap\ n \in N$.

Ini di penuhi jika untuk suatu n, b_n adalah batas atas dari $\{ a_k \mid k \in N \}$.

Ditinjau dua kasus, yaitu (i) $n \leq k$ dan (ii) $n > k$

(i) Untuk $n \leq k$

jika $n \leq k$ maka $I_n \supseteq I_k$

karena $I_n \supseteq I_k$ maka $a_k \leq b_k \leq b_n$

(ii) untuk $n > k$

jika $n > k$ maka $I_k \supseteq I_n$

karena $I_k \supseteq I_n$ maka $a_k \leq a_n \leq b_n$

Dari dua kasus di atas maka $a_k \leq b_n$ untuk setiap k.

Sehingga b_n adalah batas atas dari himpunan $\{a_k |\ k \in N\}$

Karena b_n adalah batas atas $\{a_k |\ k \in N\}$ maka $\xi \leq b_n$ untuk setiap $n \in N$

Berarti $a_n \leq \xi$ dan $\xi \leq b_n$ sehingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in N$.

Jadi jika $I_n = [a_n, b_n], n \in N$, adalah barisan interval tutup terbatas tersarang maka ada bilangan $\xi \in R$ sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in N$.

Teorema B.6.2: Jika $I_n = [a_n, b_n], n \in N$, adalah barisan interval tutup terbatas tersarang, sedemikian hingga panjang $I_n = b_n - a_n$ berlaku $Inf\ \{b_n - a_n |\ n \in N\} = 0$

maka terdapat bilangan $\xi\ dimuat\ I_n$ yang tunggal.

Bukti:

Karena $I_n = [a_n, b_n], n \in N$, adalah barisan interval tutup terbatas tersarang maka $I_n \subseteq I_1$ untuk setiap $n \in N$.

Karena $I_n \subseteq I_1$ maka $b_n \geq a_1$untuk setiap $n \in N$ maka $\{b_n \mid n \in N\}$ terbatas di bawah.

Sehingga $\{b_n \mid n \in N\}$ memiliki infimum.

Misalkan $\eta = inf\ \{b_n \mid n \in N\}$

Jelas bahwa $\eta \leq b_n$ untuk setiap $n \in N$.

Di klaim bahwa $a_n \leq \eta$ untuk setiap $n \in N$.

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Untuk suatu n, a_n adalah batas bawah dari $\{b_k \mid k \in N\}$.

Ditinjau dua kasus, yaitu (i) $n \leq k$ dan (ii) $n > k$:

(i) Untuk $n \leq k$

jika $n \leq k$ maka $I_n \supseteq I_k$

karena $I_n \supseteq I_k$ maka $a_n \leq a_k \leq b_k$

(ii) untuk $n > k$

jika $n > k$ maka $I_k \supseteq I_n$

karena $I_k \supseteq I_n$ maka $a_n \leq b_n \leq b_k$

Dari dua kasus di atas maka $a_n \leq b_k$ untuk setiap k.

Sehingga a_n adalah batas bawah dari $\{ b_k \mid k \in N \}$

Karena a_n adalah batas bawah dari $\{ b_k \mid k \in N \}$ maka $a_n \leq \eta$ untuk setiap $n \in N$.

Berarti $a_n \leq \eta$ dan $\eta \leq \mathrm{b_n}$ atau $a_n \leq \eta \leq b_n$,

sehingga $\eta \in I_n$ untuk setiap $n \in N$.

Dari teorema $B.6.1$ telah ditunjukkan bahwa $\xi = sup\, \{ a_n \mid n \in N \}$ sedangkan $\eta = inf\, \{ b_n \mid n \in N \}$ sehingga $\xi \leq \eta$ untuk setiap $n \in N$

Sekarang akan di tunjukkan bahwa :

$\mathrm{x} \in \mathrm{I_n}$ untuk setiap $n \in N$ jika dan hanya jika $\xi \leq \mathrm{x} \leq \eta$

(i) $\mathrm{x} \in \mathrm{I_n}$ untuk setiap $n \in N$ maka $\mathrm{a_n} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b_n}$

karena $\xi = \sup \{ \mathrm{a_n} \mid \mathrm{n} \in \mathrm{N} \}$ maka $\xi \leq \mathrm{x}$

karena $\eta = \inf \{ \mathrm{b_n} \mid \mathrm{n} \in \mathrm{N} \}$ maka $x \leq \eta$

sehingga $\xi \leq \mathrm{x} \leq \eta$ atau $\mathrm{x} \in [\xi, \eta]$

(ii) $\mathrm{x} \in [\xi, \eta]$ maka $\xi \leq \mathrm{x} \leq \eta$

karena $\xi \leq \mathrm{x} \leq \eta$ dan $a_n \leq \xi \leq b_n$ serta $a_n \leq \eta \leq b_n$

sehingga $a_n \leq \xi \leq \mathrm{x} \leq \eta \leq \mathrm{b_n}$ untuk setiap $n \in N$

jadi $a_n \leq x \leq b_n$ atau $x \in I_n$

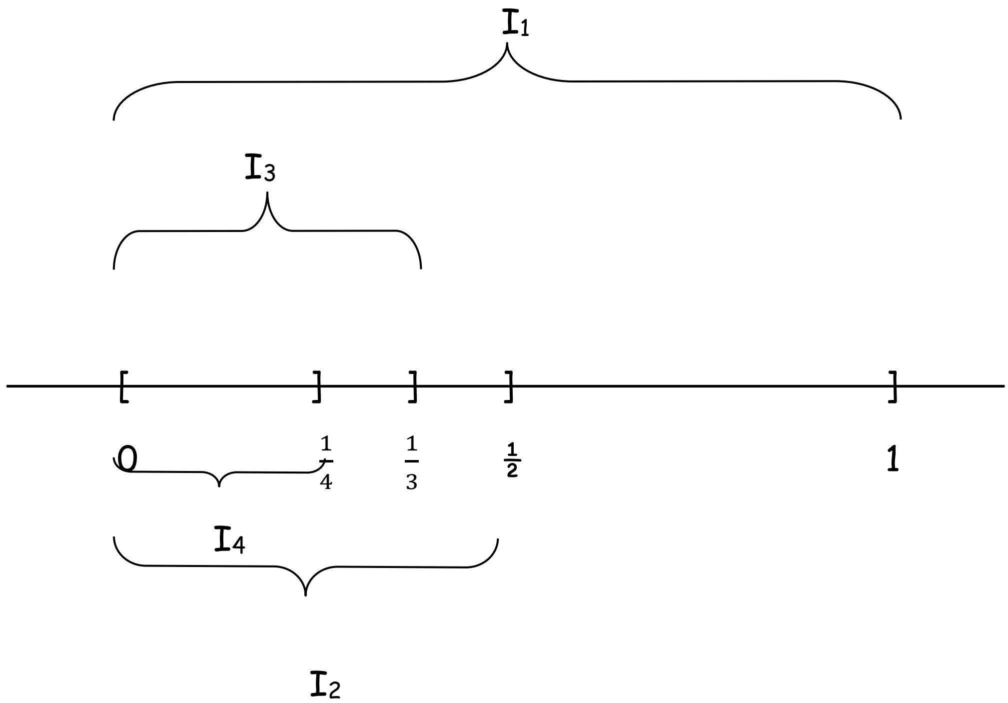
dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ = [ξ, η]

Jika $Inf\ \{\, b_n - a_n \mid n \in N\} = 0$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat n sedemikian hingga $0 \le \eta - \xi \le b_n - a_n < \varepsilon$

Sehingga menurut Teorema $B.2.8$ $\eta - \xi = 0$ atau $\eta = \xi$ adalah satu-satunya titik yang dimuat I_n untuk setiap $n \in N$.

C. Contoh-contoh

Contoh C.6.1: $I_n = [0, \frac{1}{n}]$ untuk $n \in N$. Jelas bahwa I_n merupakan barisan interval tersarang, karena $I_n \supseteq I_{n+1}$. (*lihat gambar di bawah*)



Gambar 6.4: interval bersarang $I_n = [0, \frac{1}{n}]$ untuk $n \in N$

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\, 0 \,\}$.

(i) $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ maka $x \in I_n$ untuk setiap $n \in N$.

karena $x \in I_n$ untuk setiap $n \in N$ maka $0 \leq x \leq {}^1/_n$

karena $\frac{1}{n} > 0$ maka ambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Sehingga diperoleh $0 \leq x < \varepsilon$, menurut teorema $B.2.8$ $x = 0$, berarti $x = 0 \in \{0\}$

(ii) $y \in \{0\}$ dan $\frac{1}{n} > 0$ maka $0 \leq y \leq \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in N$

berarti $y \in I_n$ untuk setiap $n \in N$

Dari (i) dan (ii) didapat $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Contoh C.6.2: $\{2\} \subseteq (2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ untuk setiap $n \in N$. Misalkan $y \neq 2$ maka $y \notin (2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ untuk setiap $n \in N$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$y \neq 2$ maka $|y - 2| \neq 0$,

sehingga terdapat $m \in N$ sedemikian hingga $|y - 2| > \frac{1}{m}$ (Corallary *B.5.9(ii)*)

jadi $y \notin (2 - \frac{1}{m}, 2 + \frac{1}{m})$

Contoh C.6.3: jika $x = 7,31414 \ldots 14\ldots$ maka $1000x = 7314,1414 \ldots$ dan $10x = 73,141414 \ldots.$

Sedangkan $1000x - 10x = 7241$, sehingga $x = \dfrac{7241}{990}$

D. Latihan 6

1. Interprestasikan secara geometris himpunan-himpunan titik berikut:

   (a) $\{ x \in R \mid x^2 \leq 1 \}$

(b) $\{ x \in R \mid 0 < x \leq 2 \}$

(c) $\{ x \in R \mid 0 < x^2 \leq 2 \}$

(d) $\{ x \in R \mid x > 0, x^2 \leq 3 \}$

(e) $\{ x = \frac{1}{n} \mid n \in N \}$

2. Jika $I = [a, b]$ dan $I' = [a', b']$ adalah interval tutup di R, tunjukkan bahwa jika $I \subseteq I'$ jika dan hanya jika $a' \leq a$ dan $b \leq b'$.
3. Jika $S \subseteq R$ tidak kosong, tunjukkan bahwa S terbatas jika dan hanya jika ada interval tutup terbatas $I \subseteq R$ sedemikian hingga $S \subseteq I$.
4. Jika $S \subseteq R$ tidak kosong terbatas, dan I_s adalah interval $I_s = [inf\ S, sup\ S]$. Tunjukkan bahwa $S \subseteq I_s$. Demikian juga jika J adalah interval tutup terbatas pada R sedemikian hingga $S \subseteq J$, tunjukkan bahwa $I_s \subseteq J$.
5. Tunjukkan bahwa jika $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$ adalah barisan interval tersarang di R, dan jika $I_n = [a_{n,} b_n]$ maka $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ dan $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$.
6. Misalkan $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ untuk $n \in N$. Buktikan bahwa jika $x > 0$ maka $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$
7. Buktikan bahwa jika $J_n = (0, \frac{1}{n})$ untuk $n \in N$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$. Buktikan bahwa jika $K_n = (n, \infty)$ untuk $n \in N$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$
8. Gunakan notasi dalam pembuktian teorema dan untuk menunjukkan bahwa $\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Dan juga $[\xi, \eta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

9. Komplemen dari suatu interval adalah interval jika dan hanya jika interval tersebut tak terbatas. Apakah pernyataan tersebut benar? Jika ya, buktikan dan jika tidak berikan contoh penyangkalnya.
10. Jika A dan B dua interval dan $A \cap B$ memuat paling sedikit sebuah elemen maka $A \cup B$ dan $A \cap B$ merupakan interval. Apakah pernyataan tersebut benar? Jika ya, buktikan dan jika tidak berikan contoh penyangkalnya.
11. Jika A dan B dua interval dan $A \cap B = \varnothing$ maka $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ dan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ bukan merupakan interval. Apakah pernyataan tersebut benar? Jika ya, buktikan dan jika tidak berikan contoh penyangkalnya.
12. Tunjukkan bahwa jika
$$\frac{\mathrm{a}_1}{10} + \frac{\mathrm{a}^2}{10^2} + \cdots + \frac{\mathrm{a}_\mathrm{n}}{10^\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{b}_1}{10} + \frac{\mathrm{b}_2}{10^2} + \cdots + \frac{\mathrm{b}_\mathrm{m}}{10^\mathrm{m}} \neq 0$$
dengan a_k dan b_k anggota $\{0, 1, \dots, 9\}$ maka $n = m$ dan $a_k = b_k$ untuk $k = 1, 2, \dots, n$
13. Ekspresikan $\frac{1}{7}$ dan $\frac{2}{19}$ sebagai bilangan desimal yang periodik
14. Tentukan bilangan rasional yang dinyatakan sebagai bilangan desimal yang periodik $1{,}25137 \dots 137\dots$ dan $37{,}14653 \dots 653 \dots$

$< blank >$

BAB VII

BEBERAPA KONSEPSI TOPOLOGI DI R

A. Definisi dan Terminologi

Definisi A.7.1: Neighborhood dari titik $x \in R$ adalah suatu himpunan V yang memuat $\varepsilon - neighborhood$ dari x,

$$V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ untuk suatu } \varepsilon > 0.$$

Definisi A.7.2: Suatu himpunan G dan F subset R.

(i) G adalah buka pada R jika untuk setiap $x \in G$ terdapat neighborhood V dari x sedemikian hingga $V \subseteq G$.

(ii) F adalah tutup pada R jika $F^c = R/ F$ adalah buka pada R

Secara simbolik dapat ditulis:

$G, F \subseteq R$. (i) G buka pada $R \Leftrightarrow (\forall x \in G)(\exists V)\, V \subseteq G$, (ii) F tutup pada $R \Leftrightarrow F^c = R \backslash F$ buka pada R.

Untuk menunjukkan bahwa $G \subseteq R$ himpunan buka pada R, cukup ditunjukkan untuk setiap titik di G mempunyai suatu $\varepsilon - neighborhood$ yang termuat di G. Secara simbolik dapat ditulis

$G\ buka$ pada $R \Leftrightarrow (\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G$

Untuk menunjukkan $F \subseteq R$ himpunan tutup pada R, cukup ditunjukkan untuk setiap titik $y \notin F$ ada suatu $\varepsilon - neighborhood$ yang saling lepas (disjoin) terhadap F. Secara simbolik dapat ditulis:

$F\ tutup$ pada $R \Leftrightarrow (\forall x \notin F)(\exists \varepsilon > 0).\, F \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) = \varnothing$

Definisi A.7.3: Suatu himpunan S subset R. Suatu titik $c \in R$ adalah titik $cluster$ dari S jika setiap $\varepsilon - neighborhood$ dari c,

$V_\varepsilon(c) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ memuat paling sedikit satu titik S yang berbeda dengan c.

Secara simbolik dapat ditulis:

$c \in R$ titik *cluster* $S \Leftrightarrow \big(\forall V_\varepsilon(c)\big) V_\varepsilon(c) \cap S - \{c\} \neq \varnothing$

dari definisi di atas jelas dikatakan $c \in R$, sehingga titik *cluster* dari S dapat anggota S atau bukan anggota S.

Definisi A.7.4: Suatu himpunan S *subset* R. Suatu titik $x \in R$ adalah titik interior dari S jika ada $\varepsilon -$ *neighborhood* dari x, $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(x) \subseteq S$.

Definisi A.7.5: Suatu himpunan S subset R. S^0 adalah *interior* dari S jika S^0 merupakan gabungan semua himpunan buka yang termuat di S.

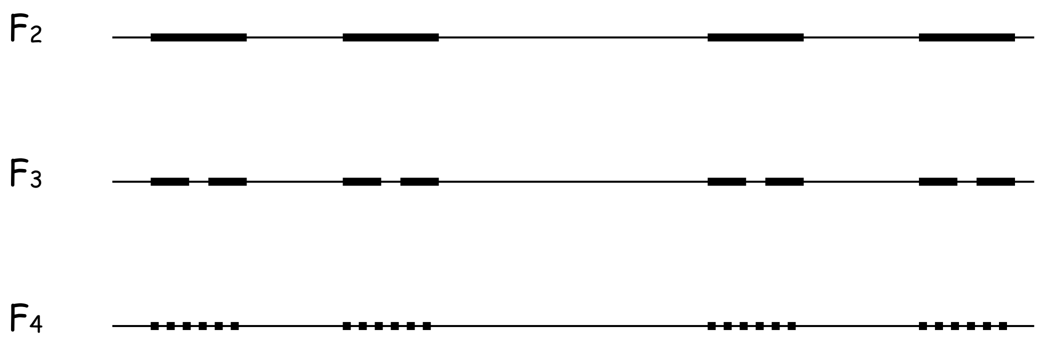
Definisi A.7.6: Suatu himpunan S *subset* R. Suatu titik $x \in R$ adalah titik *boundary* dari S jika setiap $\varepsilon -$ *neighborhood* dari x, $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ memuat titik S dan S^c.

Definisi A.7.7: Suatu himpunan S subset R. $\bar{S}$ adalah *closure* dari S jika $\bar{S}$ merupakan irisan semua himpunan tutup yang memuat S.

Definisi A.7.8: Himpunan Cantor $\boldsymbol{F}$ adalah irisan himpunan F_n, $n \in N$, F_n diperoleh dengan menghapus sepertiga himpunan buka bagian tengah yang dimulai dari $I = [0, 1]$.

Dari definisi di atas dapat dideskripsikan sebagai berikut.

F_1



Gambar 7.1: Konstruksi himpunan Cantor

$I = [0, 1]$ setelah dihilangkan $(1/3, 2/3)$ diperoleh :

$F_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

Dengan menghilangkan kedua bagian tengah dari F_1 diperoleh

$F_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$

Jelas bahwa F_2 diperoleh dari gabungan 2^2 interval tutup yang setiap intervalnya adalah $\left[\frac{k}{3^2}, \frac{(k+1)}{3^2}\right]$. Sehingga jika proses tersebut diteruskan maka akan diperoleh F_n. Dan F_n dapat dikontruksi dari gabungan 2^n interval tertutup $\left[{}^{k}/{}_{3^n}, {}^{(k+1)}/{}_{3^n}\right]$.

Pernyataan terakhir dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

B. Beberapa Teorema

Teorema B.7.1: *(Sifat Himpunan Buka)*

(i) Gabungan sebarang koleksi himpunan-himpunan bagian buka dari R adalah buka.

(ii) Irisan sebarang koleksi berhingga himpunan-himpunan buka adalah buka.

Bukti:

(i) Misalkan $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ keluarga himpunan buka pada R dan $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$

Ambil sebarang $x \in G$, maka $x \in G_\lambda$ untuk suatu $\lambda \in \Lambda$.

Selanjutnya karena G himpunan buka, maka terdapat $neighborhood\ V$ sehingga $V \subseteq G_\lambda$.

$V \subseteq G_\lambda$ dan $G_\lambda \subseteq G$, maka $V \subseteq G$.

Karena $x \in G$ sebarang, maka $G\ buka\ di\ R$.

(ii) Misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n$ adalah himpunan-himpunan buka dari R dan $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$.

Ambil sebarang $x \in G$, berarti $x \in G_k$, untuk setiap k dengan $k = 1, 2, \ldots, n$,

Karena G_k buka untuk setiap k maka ada ε_k sedemikian $(x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k) \subseteq G_k$.

Ambil $\varepsilon = inf\ \{\varepsilon_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ maka $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G_k$ untuk setiap k.

Sehingga $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G_k \subseteq G$.

Karena x diambil sebarang elemen di G maka $G\ buka$.

Teorema B.7.2: *($Sifat\ himpunan\ tutup$)*

(i) Irisan dari sebarang koleksi himpunan tutup pada R adalah tutup.

(ii) Gabungan dari sebarang koleksi berhingga himpunan-himpunan tutup pada R adalah tutup.

Bukti :

(i) Jika $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ adalah keluarga himpunan tutup pada R dan $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, maka $F^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$ yang merupakan gabungan himpunan buka.

Menurut Teorema $B.7.1(i)$ maka F^c buka.

Karena F^c buka maka F tutup.

(ii) Misalkan F_1 , F_2 ,…, F_n adalah himpunan-himpunan tutup di R dan $F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$

Sehingga $F^c = F_1^c \cap F_2^c \cap \ldots \cap F_n^c$ $(identitas\ De\ Morgan)$

F_k himpunan tutup untuk setiap k maka F_k^c buka

Sehingga menurut $teorema\ B.7.1(ii)$ F^c buka

Karena F^c buka maka F tutup.

Teorema B.7.3: $(Ciri\ Himpunan\ Buka)$ Suatu himpunan bagian R adalah buka jika dan hanya jika himpunan itu merupakan gabungan sebanyak countable interval-interval buka yang disjoin pada R.

Bukti: ($\Rightarrow$)

Misalkan G subset tidak kosong R dan G buka pada R.

Untuk setiap $x \in G$ didefinisikan $A_x = \{a \in R \mid (a, x] \subseteq G\}$, dan $B_x = \{b \in R \mid [x, b) \subseteq G\}$.

Karena G buka, akibatnya $A_x \neq \varnothing$ dan $B_x \neq \varnothing$.

Jika A_x terbatas di bawah, pilih $a_x = inf\ A_x$.

Jika A_x tak terbatas di bawah, maka $a_x = -\infty$

($a_x \notin G$ pada kedua kemungkinan di atas).

Jika B_x terbatas di atas, pilih $b_x = sup\ B_x$.

Jika B_x tak terbatas di atas, maka $b_x = \infty$

($b_x \notin G$ pada kedua kemungkinan di atas).

Definisikan $I_x = (a_x, b_x)$, sehingga I_x suatu interval buka yang memuat x.

Akan dibuktikan bahwa $I_x \subseteq G$.

Ambil $y \in I_x$ sebarang.

Karena $x \in G$ maka kemungkinannya adalah :

$y = x$ atau $y < x$ atau $y > x$

Jika $x = y$, dan $x \in G$ maka $y \in G$.

Jika $y < x$, maka dari definisi a_x , ada $a' \in A_x$, $a' < y$ sedemikian hingga $y \in (a', x] \subseteq G$.

Jika $y > x$, maka dari definisi b_x , ada $b' \in B_x$, $y < b'$ sedemikian hingga $y \in [x, b') \subseteq G$

Karena $y \in I_x$ sebarang, maka $I \subseteq G$.

Karena x ∈ G sebarang, maka $\cup_{x \in G} I_x \subseteq G$.

Selanjutnya karena $x \in G$ sebarang, ada I_x sedemikian hingga x ∈ $I_x \subseteq G$, maka $G \subseteq \cup_{x \in G} I_x$, dengan demikian $G = \cup_{x \in G} I_x$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika x, y di G dan x ≠ y maka salah satu dipenuhi $I_x = I_y$ atau $I_x \cap I_y = \emptyset$.

Misalkan : $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, akan ditunjukkan berlaku $I_x = I_y$.

jika $z \in I_x \cap I_y$, maka $z \in I_x$ dan $z \in I_y$.

Karena $z \in I_x$ akibatnya $a_x < z < b_x$ (7.1)

Karena $z \in I_y$ akibatnya $a_y < z < b_y$ (7.2)

Dari (7.1) dan (7.2) diperoleh $a_x < z < b_x$ dan $a_y < z < b_y$.

Akan ditunjukkan bahwa $a_x = a_y$ dan $b_x = b_y$.

Andaikan $a_x \neq a_y$ berdasarkan sifat trikotomi terjadi kasus berikut:

(i) Jika $a_x < a_y$, maka $a_y \in (a_x, b_x) = I_x \subseteq G$, hal ini bertentangan dengan $a_y \notin G$.

(ii) Jika $a_x > a_y$, maka $a_x \in (a_y, b_y) = I_y \subseteq G$, hal ini bertentangan dengan $a_x \notin G$.

Karena (i) dan (ii) tidak dipenuhi, akibatnya satu-satunya yang dipenuhi adalah $a_x = a_y$.

Dengan cara yang sama diperoleh $b_x = b_y$.

Dengan demikian jika $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ maka $I_x = I_y$

Selanjutnya karena kerapatan bilangan rasional pada R, Akibatnya setiap interval pasti memuat bilangan rasional. Untuk setiap interval I , jika diambil sebuah bilangan rasional, maka setiap interval mempunyai pasangan tunggal bilangan rasional, sedangkan bilangan rasional itu countable, dengan demikian G merupakan gabungan sebanyak countable dari interval-interval buka yang disjoin.

($\Leftarrow$)

Misalkan himpunan G merupakan gabungan sebanyak countable interval-interval buka yang disjoin pada R.

Menurut $teorema\ B.7.1(i)$ maka G buka.

Teorema B.7.4:$(Ciri\ Himpunan\ Buka)$ Suatu himpunan bagian R adalah tutup jika dan hanya jika himpunan itu memuat semua titik $cluster - nya$.

Secara simbolik :

$F \subseteq R$ adalah tutup $\Leftrightarrow$ $(\forall c\ titik\ cluster)\ c \in F$.

Bukti $(\Rightarrow)$:

Misalkan F himpunan tutup pada R dan x titik cluster dari F. Akan ditunjukkan bahwa $x \in F$.

Andaikan $x \notin F$, berarti $x \in F^c$, dengan F^c adalah himpunan buka, maka ada $V_\varepsilon(x)$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(x) \subseteq F^c$.

Akibatnya $V_\varepsilon(x) \cap F = \varnothing$.

Karena $V_\varepsilon(x) \cap F = \varnothing$, maka $V_\varepsilon(x) \cap F - \{x\} = \varnothing$.

Hal ini bertentangan dengan $x\ titik\ cluster$.

Jadi haruslah $x \in F$.

Bukti $(\Leftarrow)$:

Misalkan $F \subseteq R$ yang memuat semua titik clusternya.

Akan ditunjukkan bahwa F^c buka.

Ambil $y \in F^c$ sebarang, y bukan titik cluster dari F.

Oleh karena itu ada neighborhood $V_\varepsilon(y)$,

untuk suatu $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(y) \cap F - \{y\} = \varnothing$

Tetapi $y \in F^c$ $, dan\ V_\varepsilon(y) \subseteq F^c$.

Karena $y \in F^c$ sebarang, akibatnya F^c buka pada R.

Dengan demikian F tutup pada R

Teorema B.7.5: Total panjang interval yang dihapus adalah 1.

Bukti:

Panjang interval yang dihapus pada $F_1 = 1/3$

Panjang interval yang dihapus pada $F_2 = 2(1/3^2)$

………………………..

Misalkan total panjang yang dihapus adalah P maka

$$P = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2^n}{3^{n+1}}+\ldots=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Dengan menggunakan rumus deret geometri tak hingga diperoleh

$$P = \frac{1}{3}\bullet\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

Jadi $\boldsymbol{F}$ adalah subset interval satuan I yang komplemennya di I memiliki panjang 1.

Teorema B.7.6: Himpunan Cantor F tidak memuat himpunan buka yang tak kosong.

Bukti :

Andaikan F memuat himpunan buka yang tak kosong.

Misalkan $I = (a, b)$ dan $I \subseteq F_n$, untuk setiap $n \in N$.

Berarti $0 < b - a \leq (2/3^n)$

Sehingga $b - a = 0$, yang merupakan panjang himpunan kosong.

Sehingga $I = \varnothing$, kontradiksi dengan pengandaian.

Jadi F tidak memuat himpunan buka yang tak kosong.

Teorema B.7.6: Himpunan Cantor F memiliki titik sebanyak takhingga.

Bukti:*(sebagai latihan)*

C. Contoh-Contoh

Contoh C.7.1: $R = (-\infty, +\infty)$ adalah himpunan buka.

Untuk menunjukkan R adalah buka, ambil sebarang $x \in R$ dan misalkan pilih $\varepsilon = 1$, sehingga $(x-1, x+1) \subseteq R$. Jadi R adalah himpunan buka.

Contoh C.7.2: $G = \{x \in R \mid 0 < x < 2\}$ adalah himpunan buka. Untuk sebarang $x \in G$ dan pilih $\varepsilon = inf\ \{x, 2-x\}$.

Akan ditunjukkan : $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$.

Ambil $u \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ maka $|u-x| < \varepsilon$.

$|u-x| < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$

Misalkan: $\varepsilon = x$

Jika $\varepsilon = x$ dan $x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$ maka $x - x < u < x + x$.

$x - x < u < x + x \;\Leftrightarrow\; 0 < u < 2x.$ (7.3)

$\varepsilon = inf\ \{x, 2-x\}$ berarti $x < 2 - x$.

$x < 2 - x \Leftrightarrow 2x < 2$ (7.4)

Dari (7.3) dan (7.4) didapat:

$0 < u < 2x$ dan $2x < 2 \Rightarrow 0 < u < 2$ (7.5)

Misalkan $\varepsilon = 2 - x$

Jika $\varepsilon = 2 - x$ dan $x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$ maka

$x - (2-x) < u < x + (2-x) \Leftrightarrow 2x - 2 < u < 2$ (7.6)

$\varepsilon = min\{x, 2-x\}$ berarti $2 - x < x$.

$2 - x < x \Leftrightarrow 0 < 2x - 2$ (7.7)

dari (7.6) dan (7.7) didapat :

$0 < 2x - 2$ dan $2x - 2 < u < 2 \Rightarrow 0 < u < 2$ (7.8)

Dari $(7.5)\ dan\ (7.8)$ didapat bahwa: $u \in G$.

Karena sebarang $u \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ berakibat $u \in G$, hal ini menunjukkan bahwa $(x - \varepsilon\ , x + \varepsilon) \subseteq G$.

Jadi G adalah himpunan buka.

Contoh C.7.3: Sebarang interval buka $I = (a, b)$ adalah himpunan buka. Dengan cara yang sama contoh diatas untuk sebarang $x \in I$, pilih $\varepsilon = inf\ \{x - a\ , b - x\}$.

Sehingga dapat ditunjukkan bahwa $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq I$.

Ambil sebarang $u \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

Akan dibuktikan bahwa $u \in I$.

$u \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Rightarrow x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$

Misalkan $\varepsilon = x - a$,

$x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$ dan $\varepsilon = x - a$ maka $x - (x - a) < u < x + (x - a)$

$x - (x - a) < u < x + (x - a) \Leftrightarrow a < u < 2x - a$ (7.9)

$\varepsilon = inf\ \{x - a\ , b - x\}$ berarti $x - a < b - x$.

$x - a < b - x \Leftrightarrow 2x - a < b$ (7.10)

Dari $(7.9)\ dan\ (7.10)$ didapat:

$a < u < 2x - a$, dan $2x - a < b \Rightarrow a < u < b$. (7.11)

Misalkan $\varepsilon = b - x$,

$x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$ dan $\varepsilon = b - x$ maka

$x - (b - x) < u < x + b - x$.

$x - (b - x) < u < x + b - x \Leftrightarrow 2x - b < u < b$ (7.12)

$\varepsilon = inf\ \{x - a\ , b - x\}$ berarti $b - x < x - a$.

$b - x < x - a \Leftrightarrow a < 2x - b$ (7.13)

Dari (7.12) dan (7.13) didapat:

$2x - b < u < b$ dan $a < 2x - b \Rightarrow a < u < b$ (7.14)

Dari (7.11) dan (7.14), diperoleh $a < u < b$, sehingga $u \in I$.

Karena sebarang $u \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ berakibat $u \in I$,

hal ini menunjukkan bahwa $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq I$.

Jadi $I = (a, b)$ adalah himpunan buka pada R.

Contoh C.7.4: $A = \{x \in R \mid 0 < x < 1 \vee x = 2\}$ adalah bukan himpunan buka.

Ambil $2 \in A$ dan $\varepsilon = ½$ maka $\varepsilon - neighborhood$ $V_\varepsilon(2) = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \not\subset A$, sehingga terdapat $½ - neighborhood$ 2 tidak termuat pada A.

Jadi A bukan himpunan buka.

Contoh C.7.5: $B = \{ 1/n \mid n \in N \}$ bukan himpunan buka. Untuk $n = 1$ maka $1/1 = 1 \in B$. Tetapi ada $¼ - neighborhood$ 1 yaitu $V_{¼}(1)$ dan $V_{¼}(1) \not\subset B$.

Contoh C.7.6: $I = [0,1]$ adalah bukan himpunan buka. Untuk menunjukkan cukup dicari suatu $x \in I$ sedemikian hingga $\varepsilon - neighborhood$ nya tidak termuat di I.

Pilih $x = 0 \in I$, sehingga dapat ditemukan $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, untuk suatu $\varepsilon > 0$ yaitu $-\varepsilon < u < 0$, tetapi $u \notin I$, karena $\varepsilon - neighborhood$ 0 tidak termuat di I.

Dengan demikian tidak memenuhi definisi himpunan buka. Jadi I adalah bukan himpunan buka.

Contoh C.7.7: $I := [0,1]$ adalah himpunan tutup. Sesuai definisi, berarti cukup ditunjukkan bahwa I^c adalah himpunan buka. Ambil sebarang $y \in I^c$, berarti $y \notin I$.

Misalkan $y < 0$, pilih $\varepsilon = |y|$.

$(y - \varepsilon, y + \varepsilon) = (y - |y|, y + |y|) = (2y, 0) \subseteq I^c$ (7.15)

Misalkan $y > 1$, pilih $\varepsilon = y - 1$.

$(y - \varepsilon, y + \varepsilon) = (1, 2y - 1) \subseteq I^c$ (7.16)

Dari (7.15) dan (7.16), ternyata bahwa I adalah himpunan buka atau $I \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) = \emptyset$, sehingga menurut definisi I adalah himpunan tutup.

Contoh C.7.8: Himpunan $H = \{x \in R \mid 0 \leq x < 1\}$ adalah tidak buka dan tidak tutup.

Akan ditunjukkan H tidak memenuhi definisi $A.7.2(i)$

Pilih $x = 0 \in H$, dan $\varepsilon = ½$ maka ada $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (-½, ½) \not\subset H$.

Dengan demikian H tidak buka. (7.17)

Pilih $y = 1 \in H^c$, dan $\varepsilon = ½$ maka ada $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (-½, ½)$ $\not\subset H^c$. Dengan demikian H^c tidak buka.

Akibatnya H tidak tutup. (7.18)

Dari (7.17) dan (7.18), disimpulkan bahwa H tidak buka dan tidak tutup.

Contoh C.7.9: Himpunan kosong adalah himpunan buka di R.

Untuk menunjukkan bahwa himpunan kosong adalah buka, perhatikan definisi berikut:

$G\ buka \Leftrightarrow (\forall x \in G)\ (\exists \varepsilon > 0)\ (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subseteq G$,

yang ekuivalen dengan

$G\ buka \Leftrightarrow [(\forall x)\ x \in G \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)]\ (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subseteq G$,

Bila $G = \varnothing$ didapat

$\varnothing\ buka \Leftrightarrow [(\forall x)\ x \in \varnothing \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)]\ (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subseteq \varnothing$,

Pernyataan $x \in \varnothing$ salah (karena $\varnothing$ tidak memiliki anggota), Sehingga pernyataan :

$[(\forall x)\ x \in \varnothing \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)]\ (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subseteq \varnothing$ selalu bernilai benar.

Karena pernyataan ini berlaku untuk setiap $x \in R$, maka dapat ditulis:

$\varnothing\ buka \Leftrightarrow [(\forall x) x \in \varnothing \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)]\ (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subseteq \varnothing$, juga benar berakibat pernyataan $\varnothing$ buka benar.

Jadi $\varnothing$ adalah himpunan buka.

Contoh C.7.10: Himpunan semua bilangan real R, dan $\varnothing$ adalah himpunan buka dan sekaligus tutup di R. Karena $\varnothing^c = R$, dan R buka akibatnya $\varnothing$ tutup. $R^c = \varnothing$ dan $\varnothing$ buka akibatnya R tutup.

Contoh C.7.11: Misalkan $G_n = (0, 1 + 1/n)$ untuk setiap $n \in N$. Jelas bahwa G_n buka untuk setiap $n \in N$. Tetapi $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1]$ tidak buka. Jadi *Irisan sebanyak tak hingga himpunan buka di R tidak harus buka.*

Contoh C.7.12: $F_n = [1/n, 1]$ untuk $n \in N$. Jelas bahwa F_n tutup untuk setiap $n \in N$. Tetapi $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$ tidak tutup. Jadi *Gabungan sebanyak tak hingga himpunan tutup di R tidak harus tutup.*

Contoh C.7.13: Jika $S = (0, 2)$ maka setiap titik pada interval tutup $[0, 2]$ merupakan titik cluster S. Jelas bahwa titik 0 dan 2 bukan anggota S tetapi merupakan $titik\ cluster\ S$.

Contoh C.7.14: Himpunan terhingga tidak memiliki titik cluster. *(mengapa?)*

Contoh C.7.15: Himpunan bilangan asli N, tak hingga tetapi tidak memiliki titik cluster. Karena untuk setiap $n \in N$ dapat ditemukan $V_\varepsilon(n) = (n - \varepsilon, n + \varepsilon)$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(n) \cap N - \{n\} = \varnothing$, yaitu dengan mengambil $\varepsilon = ½$. Begitu juga untuk $x \in R$ dan $x \neq n$ maka dapat ditemukan $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(x) \cap N - \{x\}\ \varnothing$.

Jadi N tidak memiliki titik cluster.

Contoh C.7.16: $A = \{ 1/n \mid n \in N \}$ hanya memiliki titik cluster 0. Sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan angota A yang lain selain 0 yang termuat dalam $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Contoh C.7.17: $S = [1, 2]$ maka titik-titik ujung interval yaitu $1\ dan\ 2$ bukan titik interior S. Karena $(\forall \varepsilon > 0)\ V_\varepsilon(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \not\subset S$. Dengan cara yang sama titik 2 bukan titik interior S. Tetapi untuk setiap $u \in (1, 2)$ merupakan titik interior S. Karena untuk setiap $u \in (1, 2)$ dapat ditemukan $\varepsilon - neighborhood$ dari u sedemikian hingga $(u - \varepsilon, u + \varepsilon) \subseteq S$, dengan mengambil $\varepsilon = min\{u - 1,\ 2 - u\}$.

Contoh C.7.18: $S = (1, 2]$ maka $S^0 = (1, 2)$. *(mengapa?)*

Contoh C.7.19: $A = \{ x \in R \mid x = 0 \vee 1 < x \leq 4\}$ maka titik-titik 0, 1 dan 4 merupakan titik $boundary\, A$. Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ memuat titik A dan A^C. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\varepsilon > 0, V_\varepsilon(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ dan $V_\varepsilon(4) = (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$ memuat titik A dan A^c.

Contoh C.7.20: $S = (0, 1]$ maka $\bar{S} = [0, 1]$. *(mengapa?)*

D. Latihan 7

1. Jika $x \in (0, 1)$ dan $\varepsilon = min\,\{x, 1 - x\}$. Tunjukkan jika $|u - x| < \varepsilon$ maka $u \in (0, 1)$.

2. Tunjukkan bahwa interval (a, ∞) dan $(-\infty, a)$ adalah buka, dan interval $[a, \infty)$ dan $(-\infty, a]$ adalah tutup.
3. Tulislah bukti sifat himpunan buka (ii) dengan menggunakan induksi matematika.
4. Buktikan bahwa jika $G_n = (0, 1 + 1/n)$ untuk $n \in N$ maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1]$
5. Tunjukkan bahwa himpunan semua bilangan asli N adalah tutup.
6. Tunjukkan bahwa $A = \{ 1/n \mid n \in N \}$ tidak tutup, tetapi $A \cup \{0\}$ himpunan tutup.
7. Tunjukkan bahwa himpunan bilangan rasional Q tidak buka atau tidak tutup.
8. Tunjukkan bahwa jika G himpunan buka dan F himpunan tutup maka G/F adalah himpunan buka dan F/G adalah himpunan tutup.
9. Tunjukkan bahwa $A \subseteq R$ buka jika dan hanya jika setiap titik di A merupakan titik interior A.
10. Tunjukkan bahwa setiap himpunan A dan A^c memiliki tepat sama titik boundary.
11. Tunjukkan bahwa $G \subseteq R$ himpunan buka jika G tidak memuat titik boundary-nya.
12. Tunjukkan bahwa $F \subseteq R$ himpunan tutup jika F memuat semua titik boundary-nya.
13. Jika $A \subseteq R$ maka tunjukkan bahwa A^o adalah himpunan buka dan A^o merupakan himpunan buka terbesar yang dimuat A.

14. Tunjukkan bahwa titik $z \in A^{o}$ jika dan hanya jika z titik interior A.
15. Misalkan A dan B subset R. Tunjukkan bahwa
    (a) $A^{o} \subseteq A$
    (b) $(A^{o})^{o} = A^{o}$
    (c) $(A \cap B)^{O} = A^{o} \cap B^{o}$
    (d) $(A^{o} \cup B^{o}) \subseteq (A \cup B)^{O}$
16. Tunjukkan bahwa titik $w \in \overline{S}$ jika dan hanya jika w merupakan titik interior S atau titik boundary S.
17. Berikan contoh $A \subseteq R$ sedemikian hingga $A^{o} = \varnothing$ dan $\overline{A} = R$.
18. Jika G himpunan buka dan $x \in G$ maka tunjukkan bahwa A_x dan B_x *pada bukti teorema* $B.7.3$ tidak kosong.
19. Tunjukkan bahwa setiap titik pada himpunan Cantor merupakan titik cluster dari F.
20. Tunjukkan bahwa setiap setiap titik pada himpunan Cantor merupakan titik cluster dari F^{c}.
21. Tunjukkan bahwa himpunan Cantor merupakan barisan interval tersarang.
22. Tunjukkan bahwa himpunan Cantor tidak kosong
23. Tunjukkan bahwa setiap titik pada himpunan Cantor merupakan titik cluster dari F^{c}.
24. Tunjukkan bahwa himpunan Cantor merupakan barisan interval tersarang.
25. Tunjukkan bahwa himpunan Cantor tidak kosong.

BAB VIII

BARISAN DAN LIMIT BARISAN REAL

Pada bab ini dibahas mengenai barisan secara konseptual yang akan menghasilkan beberapa karakteristik yang dimilikinya. Mengingat kembali bahwa yang dimaksud dengan suatu barisan pada suatu himpunan S adalah suatu fungsi dari himpunan $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dengan daerah hasilnya di S. Selanjutnya dalam bab ini hanya diperhatikan barisan di R.

A. Definisi dan Terminologi

Definisi A.8.1: Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari himpunan N dengan daerah hasil yang termuat di R.

Dengan kata lain, suatu barisan di R memasangkan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \ldots$ secara tunggal dengan bilangan real. Bilangan real yang diperoleh tersebut disebut elemen, atau nilai, atau suku dari barisan tersebut. Hal yang biasa untuk menuliskan elemen dari R yang berpasangan dengan nilai X, dengan suatu simbol seperti x_n (atau a_n, atau z_n). Jadi bila $X: N \rightarrow R$ suatu barisan, sering kali nilai X pada n ditulis dengan x_n, dari pada $X(n)$, sering kali barisan ini ditulis dengan notasi

$$X, (x_n), (x_n: n \in N)$$

digunakannya kurung untuk menyatakan bahwa urutan barisan tersebut diturunkan dari N. Jadi, dibedakan antara penulisan $X = (x_n: n \in N)$, yang suku-sukunya mempunyai urutan dan himpunan nilai-nilai dari barisan tersebut $\{x_n : n \in N\}$ yang urutannya tidak diperhatikan. Sebagai ilustrasi, barisan $X := ((-1)^n : n \in N)$ yang suku-sukunya berganti-ganti -1 dan 1, sedangkan himpunan nilai barisan tersebut $\{(-1)^n : n \in N\}$ sama dengan $\{-1, 1\}$.

Dalam mendefinisikan barisan sering lebih mudah dengan menulis secara berurutan suku-sukunya, dan berhenti setelah aturan formasinya kelihatan. Jadi kita boleh menulis

$$X := (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} \dots)$$

Meskipun metode yang lebih baik adalah bentuk umum

$$X = \left(\frac{1}{2n} : n \in N\right)$$

atau secara sederhana $X = \left(\frac{1}{2n}\right)$ cara lain menentukan nilai $x_1$dan memberi rumus untuk x_{n+1} $(n \geq 1)$ secara umum dapat ditetapkan x_1 dan memberikan rumus untuk x_{n+1} dari $x_1, x_{2,\dots,} x_n$. barisan ini dikatan secara induktif atau rekursif.

Definisi A.8.2: Barisan $X = (x_n)$ dalam R adalah ***konvergen*** pada $x \in R$ atau $limit\ dari(\boldsymbol{x_n})$ jika setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$ maka suku-suku x_n memenuhi $|x_n - \mathrm{x}| < \varepsilon$. Jika barisan memiliki limit disebut bahwa barisannya ***konvergen***, jika limitnya tidak ada maka barisannya ***divergen***.

Catatan:

Notasi $K(\varepsilon)$ digunakan untuk menekankan K bergantung pada ε. Namun sering kali lebih mudah untuk menuliskan K daripada $K(\varepsilon)$.

Dalam banyak nilai "kecil" nilai ε dari K untuk jarak $|x_n - \mathrm{x}|$ antara $\boldsymbol{x_n}$ dan x kurang dari ε untuk semua $n \geq k = K(\varepsilon)$

$$Lim\, X = x \text{ atau } lim\, \boldsymbol{x_n} = x.$$

digunakan simbol $\boldsymbol{x_n} \to \mathbf{x}$ menunjukkan secara intuitif nilai $\boldsymbol{x_n}$ "mendekati" bilangan x seperti $n \to \infty$.

Adalah penting untuk menyadari bahwa konvergensi (atau divergensi) dari suatu barisan $X = (x_n)$ hanya bergantung pada ''perilaku akhir' dari ketentuan. Dengan ini kita berarti bahwa jika, untuk setiap bilangan asli m, kita menjatuhkan suku m pertama dari barisan, maka barisan yang dihasilkan X_m menyatu jika dan hanya jika barisan orisinal menyatu, dan dalam hal ini, batasnya adalah sama. Kami akan menyatakan ini secara resmi setelah kami memperkenalkan gagasan 'ekor' dari suatu barisan.

Definisi A.8.3

Jika $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ adalah barisan bilangan real dan jika m adalah bilangan asli, maka $m - ekor$ dari X adalah barisan $X_m = (X_{m+n}: n \in N) = (X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)$

Sebagai ilustrasi $3 - ekor$ barisan dari $X = (2,4,6,8,10, \dots 2n, \dots)$ adalah barisan $X_3 = (8,10,12, \dots 2n + 6, \dots)$

B. Beberapa Teorema

Teorema B.8.1$(Ketunggalan\ Limit)$**:** Suatu barisan di R memiliki paling banyak satu limit.

Bukti:

Misalkan untuk x' dan x'' kedua Limit dari $(\boldsymbol{x_n})$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\boldsymbol{K'}$ sedemikian hingga $|x_n - \mathbf{x}'| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk semua $n \geq K'$, dan K'' sedemikian hingga $|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}''| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk semua $n \geq K''$. Ambil K yang lebih besar dari K' dan K'' kemudian untuk $n \geq K$ kita diterapkan ketidak samaan segitiga untuk mendapatkan

$$|\boldsymbol{x}' - x''| = |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x_n} + \boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}''|$$

$$\leq |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x_n}| + |\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang bilangan positif disimpulkan bahwa $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' = 0$ untuk $x \in R \; dan \; \varepsilon > 0$ disebut $\varepsilon - neighborhood$ dari x yaitu himpunan $V_\varepsilon(x) = \{u \in R : |u - x| < \varepsilon\}$. Karena $u \in V_\varepsilon(x)$ ekuivalen $|u - x| < \varepsilon$ definisi konvergen dari barisan dapat diformulasikan dalam hal suku-suku terdekatnya. Barisan $\boldsymbol{x_n}$ konvergen ke x akan diberikan dalam pernyataan berbeda pada beberapa teorema berikut.

Teorema B.8.2

$X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan $x \in R$ Pernyataan berikut ekuivalen.

(a) $X \; konvergen \; ke \; x$.

(b) untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, suku-suku x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

(c) untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, suku-suku x_n memenuhi $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(d) untuk setiap $\varepsilon - neighborhood\ dari\ x$, $'V_\varepsilon(x)'$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, suku-suku x_n milik $V_\varepsilon(x)$.

Bukti:

Ekivalensi dari (a) dan (b) merupakan definisi. Sedangkan ekivalensi dari (b), (c), dan (d) mengikuti implikasi berikut:

(a) ⇒ (b) Jelas (dari definisi).

(b) ⇒ (c) $|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(c) ⇒ (d) $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Leftrightarrow x_n \in V_\varepsilon(x)$.

(d) ⇒ (a) $x_n \in V_\varepsilon(x) \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

Catatan:

Definisi limit barisan bilangan real digunakan untuk membuktikan bahwa nilai x yang telah ditetapkan merupakan limit. Hal ini tidak menentukan berapa nilai limit seharusnya. Sehingga diperlukan latihan untuk sampai kepada dugaan (*conjecture*) nilai limit dengan perhitungan langsung suku-suku barisan tersebut. Dalam hal ini komputer akan sangat membantu.

Namun demikian untuk menunjukkan bahwa suatu barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke x, cukup dengan memilih $\varepsilon_0 > 0$ sehingga berapa pun nilai K yang diambil, diperoleh suatu $n_k > K$ sehingga x_{n_k} tidak terletak dalam $V_\varepsilon(x)$.

Teorema B.8.3: Misalkan $X = (x_n : n \in N)$ suatu barisan bilangan real dan $m \in N$. Maka $ekor - m$ adalah $X_m = (x_{m+n} : n \in N)$ dari X konvergen jika dan hanya jika X konvergen, dalam hal ini, $\lim X_m = \lim X$.

Bukti:

Ambil sebarang $p \in N$,

suku ke-p dari X_m merupakan suku ke $(p + m)$ dari X.

Dengan cara yang sama bila $q > m$, maka suku ke-q dari X merupakan suku ke $(q - m)$ dari X_m.

Asumsikan X konvergen ke x. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, bila suku-suku dari X untuk $n \geq K(\varepsilon)$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$, maka suku-suku dari X_m dengan $k \geq K(\varepsilon) - m$ memenuhi $|x_k - x| < \varepsilon$. Jadi kita dapat memilih $K_m(\varepsilon) = K(\varepsilon) - m$, sehingga X_m juga konvergen ke x.

Sebaliknya, bila suku-suku dari X_m untuk $k \geq K_m(\varepsilon)$ memenuhi $|x_k - x| < \varepsilon$, maka suku-suku dari X dengan $n \geq K(\varepsilon) + m$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jadi kita dapat memilih $K(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) + m$.

Karena itu, X konvergen ke x jika dan hanya jika X_m konvergen ke x.

Kadang-kadang kita akan mengatakan suatu barisan X pada akhirnya mempunyai sifat tertentu bila beberapa ekor X mempunyai sifat tersebut. Sebagai contoh, kita katakan bahwa barisan $(3, 4, 5, 5, 5, \ldots, 5, \ldots)$ pada akhirnya "konstan". Di lain pihak, barisan $(3, 5, 3, 5, \ldots, 3, 5, \ldots)$ pada akhirnya tidaklah konstan.

Gagasan kekonvergenan dapat pula dinyatakan dengan begini: Suatu barisan X konvergen ke x jika dan hanya jika suku-suku dari X pada akhirnya terletak di dalam $\varepsilon - neigborhood$ dari x.

Dalam menetapkan bahwa bilangan x adalah limit dari suatu barisan (X_n), kita sering mencoba untuk menyederhanakan perbedaan $|x_n - x|$ sebelum mempertimbangkan suatu $\varepsilon > 0$ dan menemukan $K(\varepsilon)$ sebagaimana disyaratkan oleh definisi limit. Ini dilakukan di beberapa contoh yang dibahas di bawah. Hasil selanjutnya adalah pernyataan yang lebih formal dari ide ini, dan contoh-contoh yang mengikuti menggunakan pendekatan ini.

Teorema B.8.4

Misalkan X_n barisan bilangan real dan $x \in R$. Bila (a_n) merupakan suatu barisan bilangan real positif dengan $lim\,(a_n) = 0$ dan jika untuk suatu konstanta $C > 0$ dan suatu $m \in N$, dan berlaku

$$|x_n - x| < Ca_n \text{ untuk semua } n \geq m$$

maka $lim(x_n) = x$

Bukti :

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$, karena lim $(a_n) = 0$, maka terdapat bilangan asli $K = K\,(\varepsilon/C)$, sehingga bila $n \geq K$ maka

$$a_n = |a_n - 0| < \varepsilon/C.$$

Karena itu hal ini mengakibatkan bila $n \geq K$dan $n \geq m$, maka

$$|x_n - x| \leq Ca_n < C(\varepsilon/C) = \varepsilon \text{ atau } |x_n - x| < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, disimpulkan bahwa $x = lim(X_n)$

C. Contoh-Contoh

Contoh C.8.1:

(a) Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah barisan $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots)$, memiliki suku-suku bergantian -1 dan 1.

(b) Bila $b \in R$, barisan $B = (b, b, b, \dots)$, yang sukunya tetap b, disebut barisan konstan. Jadi barisan konstan 1 adalah $(1, 1, 1, \dots)$ semua yang sukunya 1, dan barisan konstan 0 adalah barisan $(0, 0, 0, \dots)$.

(c) Jika $b \in R$, maka $B = (b^n)$ adalah barisan $\mathrm{B} = (\mathrm{b}, \mathrm{b}^2, \mathrm{b}^3, \dots, \mathrm{b}^n, \dots)$ khususnya jika $\mathrm{b} = \frac{1}{2}$, maka didapatkan $\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathrm{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}\right)$

(d) Barisan $(2n : n \in N)$ bilangan asli genap didefinisikan secara induktif oleh

$$x_1 := 2, x_{n+1} := x_n + 2,$$

atau menurut definisi

$$y_1 := 2, y_{n+1} := y_1 + y_n,$$

(e) Barisan Fibonacci $F := (\boldsymbol{f_n})$ diberikan secara induktif sebagai berikut:

$$f_1 := 1 \quad f_2 := 1 \quad f_{n+1} := f_{n-1} + f_n \ (n \geq 2)$$

Maka sepuluh suku pertama barisan Fibonacci dapat dilihat sebagai $F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$

Sekarang akan kita kenalkan cara-cara penting dalam mengkonstruksi barisan baru dari barisan-barisan yang diberikan.

Contoh C.8.2

(a) $lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Jika $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. menurut oleh sifat $Archimedes\ B.2.5(iv)$ bahwa akan ditemukan bilangan asli $K = K(\varepsilon)$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon)$ atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$ kemudian jika $n \geq K(\varepsilon)$ maka $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. konsekuensinya jika $n \geq K$ maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{\varepsilon}$$

oleh karena itu dapat ditegaskan bahwa barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0.

(b) $lim\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{2}+\mathbf{1}}\right) = 0,$

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Untuk menentukan K, pertama perhatikan bahwa jika $n \in N$ maka

$$\left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{2}+\mathbf{1}}\right| < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{2}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$$

sekarang pilih K sedemikian hingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Seperti pada poin (a) di atas kemudian $n \geq K$ mengimplikasikan bahwa $\frac{1}{n} < \varepsilon$ dan

$$\left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{2}+\mathbf{1}} - \mathbf{0}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{2}+\mathbf{1}} < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} < \varepsilon$$

Jadi telah ditunjukkan bahwa limit dari barisan tersebut 0.

(c) $lim\left(\frac{\mathbf{3n+2}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\right) = 3$

Diberikan $\varepsilon > 0$, akan didapatkan ketidaksamaan

$$\left|\frac{\mathbf{3n+2}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \mathbf{3}\right| < \varepsilon \qquad (8.1)$$

apabila nilai n cukup besar,

Pertama menyederhanakan ekspresi di bagian kiri.

$$\left|\frac{\mathbf{3n+2}}{\mathbf{n+1}}-\mathbf{3}\right| = \left|\frac{\mathbf{3n+2-3n-3}}{\mathbf{n+1}}\right| = \left|\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{n+1}}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}} < \frac{1}{\mathrm{n}}$$

Jika ketidaksamaan $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} < \varepsilon$ terpenuhi, maka ketidaksamaan (8.1) terpenuhi. Jika $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}} < \varepsilon$ kemudian untuk $n \geq K$ kita juga memiliki $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} < \varepsilon$ dan disini (8.1) berlaku. Dengan demikian limit dari barisan tersebut adalah 3.

(d) $lim(\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{0}$

Dikalikan dan dibagi dengan $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ menjadi

$$\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{\boldsymbol{n}})(\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \sqrt{\boldsymbol{n}})}{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \sqrt{\boldsymbol{n}}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \sqrt{\boldsymbol{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} + \sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ didapatkan $\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} < \varepsilon$ jika dan hanya jika $\frac{1}{\boldsymbol{n}} < \varepsilon^2$ atau $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Jadi jika $\mathrm{K} > \frac{1}{\varepsilon^2}$ maka $\sqrt{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \sqrt{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{\varepsilon}$ untuk semua $n > K$ (dalam kasus ini jika diberikan $\varepsilon = \frac{1}{10}, maka$ digunakan $K > 100$).

(e) $jika\ 0 < b < 1\ maka\ lim(b^n) = 0$

Dengan menggunakan prinsip dasar dari fungsi $natural\ logarithma$ jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dapat dilihat bahwa

$b^n < \varepsilon \Leftrightarrow n\ ln\ b < \ln\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln b}$.

(ketidaksamaan terakhir adalah kebalikannya karena $\ln b < 0$) jadi jika dipilih bilangan asli K dengan $K > \frac{\ln\varepsilon}{\ln b}$ maka diperoleh

$0 < b^n < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$ jadi kita memiliki $lim(b^n) = 0$.

Untuk contoh ini jika $b = 0{,}8$ dan jika $\varepsilon = \mathbf{0{,}01}$ diberikan maka kita perlu $K > \frac{\ln .01}{\ln .8} \approx 20.6377$. Jadi $K = 21$ akan menjadi pilihan yang tepat untuk $\varepsilon = 0{,}01$.

Catatan: Permainan $\mathrm{K}(\varepsilon)$ dalam konvergensi barisan, salah satu cara untuk menjaga hubungan antara ε dan K sebagai permainan yang disebut $K(\varepsilon)$. Dalam permainan ini pemain A menegaskan bahwa angka x tertentu adalah limit dari suatu barisan (x_n). Pemain B menantang pernyataan ini dengan memberikan pemain A nilai tertentu untuk $\varepsilon > \mathbf{0}$ pemain A harus menanggapi tantangan dengan menghasilkan nilai K sedemikian rupa sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ untuk semua $n > K$. Jika pemain A selalu mampu menemukan nilai K yang memenuhi, maka dia menang, namun jika pemain B dapat memberikan nilai spesifik $\varepsilon > \mathbf{0}$ untuk pemain A tidak dapat merespon secara memadai, maka pemain B menang dan kami menyimpulkan bahwa barisannya konvergen ke x.

Untuk menunjukkan bahwa $x = (x_n)$ tidak konvergen ke x cukup ditunjukkan sebuah bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga tidak dapat memilih bilangan asli K. Seorang dapat menemukan $\boldsymbol{n_k}$ yang memenuhi $\boldsymbol{n_k \geq k}$ seperti $|\boldsymbol{x_{n_k} - x}| \geq \varepsilon_0$ (akan di bahas lebih rinci dalam bab 13)

Contoh C.8.3

Barisan $(0, 2, 0, 2, . . , 0, 2, ...)$ tidak konvergen ke 0.

Jika pemain A menegaskan bahwa 0 adalah limit dari barisan ia akan kehilangan permainan $\mathrm{K}(\varepsilon)$ ketika pemain B memberi nilai $\varepsilon < \mathbf{2}$ untuk memastikan maka pemain B memberi nilai $\varepsilon_0 = 1$ maka pemain A tidak dapat menemukan bilangan K. selanjutnya pemain B merespon dengan memilih bilangan genap $n > K$. nilai yang sesuai adalah $\boldsymbol{x_n} = 2$ maka dari itu $|\boldsymbol{x_n - 0}| = 2 > 1$ maka 0 bukan limit barisan.

Contoh C.8.4

a. Bila $a > 0$, maka $\lim\left(\frac{1}{1+na}\right)$= 0.

Karena $a > 0$, maka $0 < na < 1 + na$, karenanya $0 < 1/(1 + na) < 1/na$. Yang selanjutnya mengakibatkan

$$\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| \leq \left(\frac{1}{a}\right)\frac{1}{n} \; untuk\; semua\; n \in N$$

Karena $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, menurut $teorema\ B.8.4$ dengan $C = \frac{1}{a}$ dan $m = 1$ diperoleh bahwa $\lim\big(1/(1 + na)\big) = 0$

b. Jika $0 < b < 1$ kemudian $\lim(b^n) = 0$

Limit ini diperoleh sebelumnya pada $contoh\ C.8.2(e)$. Kami akan memberikan bukti kedua yang mengilustrasikan penggunaan $Ketidaksamaan\ Bernoulli$ (*lihat contoh 5 bab 2*).

Sedangkan $0 < b < 1$, dapat ditulis $b = \frac{1}{(1+a)}$, dimana $a := \left(\frac{1}{b}\right) - 1$ jadi $a > 0$. Dengan $ketidaksamaan\ Bernoulli$, diperoleh $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Karenannya

$$0 < b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}.$$

Jadi dari $teorema\ B.8.4$. disimpulkan bahwa $\lim(b^n) = 0$.

Khususnya, jika $b = 0{,}8$, sehingga $a = 0{,}25$, dan jika kita diberikan $\varepsilon = 0{,}01$, maka ketidaksamaan sebelumnya memberi kita $K(\varepsilon) = \frac{4}{0{,}01} = 400$. Membandingkan dengan contoh $C8.2.(e)$, dimana kita memperoleh $K = 21$, kita melihat metode estimasi tidak memberikan nilai "terbaik" dari K. Namun, untuk tujuan menetapkan limit, ukuran K tidak terduga.

(c) Bila $C > 0$, maka $\lim(c^{\frac{1}{n}}) = 1$.

Untuk kasus $C = 1$ mudah karena $\lim(c^{\frac{1}{n}}) = 1$ merupakan barisan konstan $(1, 1, 1, \ldots)$ yang jelas konvergen ke 1.

Bila $c > 1$, maka $c^{\frac{1}{n}} = 1 + d_n$ untuk suatu $d_n > 0$. Dengan menggunakan $ketaksamaan\ Bernoulli\ \ contoh\ 5\ (bab\ 2\ hal. 31)$

$$\mathrm{C} = (1+ d_n)^n \geq 1 + nd_n \text{ untuk } n \in N$$

Karenanya $c - 1 \geq nd_n$, sehingga $d_n \leq (\mathrm{c} - 1)/\mathrm{n}$. Akibatnya akan mempunyai

$$\left|c^{\frac{1}{n}} - 1\right| = d_n \leq (c - 1)\frac{1}{n} \text{ untuk semua } n \in N.$$

Dengan menggunakan $teoremaB. 8.4$ diperoleh $\lim(c^{\frac{1}{n}}) = 1$ maka $\mathrm{c} > 1$.

Sedangkan bila $0 < \mathrm{C} < 1$; maka $(c^{\frac{1}{n}}) = 1/(1 + h_n)$ untuk suatu $h_n > 0$. Dengan menggunakan $ketidaksamaan\ Bernoulli$ diperoleh

$$c = \frac{1}{(1 + h_n)^n} \leq \frac{1}{1 + nh_n} < \frac{1}{nh_n}$$

yang diikuti oleh $0 < h_n < 1/nc$ untuk semua $n \in N$. Karenanya kita mempunyai

$$0 < 1 - C^{\frac{1}{n}} = \frac{h_n}{1 + h_n} < h_n < \frac{1}{nc}$$

Sehingga:

$$\left|C^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{n} \text{ untuk semua } n \in N.$$

Dengan menggunakan $teorema\ B. 8.4$ diperoleh,

$lim(c^{\frac{1}{n}}) = 1$ apabila $0 < \mathrm{c} < 1$.

(d) $lim\ (n^{\frac{1}{n}}) = 1$.

Karena $n^{\frac{1}{n}} > 1$ untuk $n > 1$. Akibatnya dapat ditulis

$n^{\frac{1}{n}} = (1 + k_n)$ untuk suatu $k_n > 0$ bila $n > 1$.

Sehingga $n = (1 + k_n)^n$ dengan *teorema Binomial*, bila $n > 1$ diperoleh

$$n = (1 + nk_n) + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$$

Sehingga dihasilkan,

$$n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$$

Dari sini $k_n^2 \leq \frac{2}{n}$ untuk $n > 1$. Sekarang bila $\varepsilon > 0$ diberikan, maka menurut sifat *Archimedes* terdapat bilangan asli N_ε sehingga $\frac{2}{N_\varepsilon} < \varepsilon^2$.

Sehingga jika $n \geq sup\{2, N_\varepsilon\}$ maka $\frac{2}{N} < \varepsilon^2$, disini

$$0 < n^{\frac{1}{n}} - 1 = k_n \leq (\frac{2}{n})^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka lim $(n^{\frac{1}{n}}) = 1$.

D. Latihan 8

1. Barisan (x_n) didefinisikan oleh rumus suku ke – n. Tuliskan lima suku pertama dalam setiap barisan berikut:

   (a) $x_n := 1 + (-1)^n$

   (b) $x_n := \frac{1}{n(n+1)}$

   (c) $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$

   (d) $x_n := \frac{1}{n^2 + 2}$

2. Diberikan beberapa suku pertama barisan (x_n) berikut. Suku-suku barisan tersebut membentuk pola bilangan, sehingga suku-suku berikutnya dapat ditentukan. Tentukan Rumus untuk suku ke-n dari barisan x_n tersebut.

(a) $5,7,9,11, \ldots$

(b) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}, \ldots$

(c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

(d) $1,4,9,16, \ldots$.

3. Buat daftar lima suku pertama dari barisan yang ditentukan secara induktif berikut ini.

(a) $x_1 := 1, x_{n+1} := 3x_n + 1$

(b) $y_1 := 2, y_{n+1} := \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{2}{y_n}\right)$

(c) $z_1 := 1, z_2 := 2, z_{n+2} := \frac{(z_{n+1} + z_n)}{(z_{n+1} - z_n)}$

(d) $s_1 := 3, s_2 := 5, s_{n+2} := s_n + s_{n+1}$

4. Untuk setiap $b \in R$, buktikan bahwa $limit\ (b/n) = 0$

5. Gunakan definisi limit dari barisan untuk menunjukkan berlakunya limit-limit berikut.

(a) $lim\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = 0$

(b) $lim\left(\frac{2n}{n+1}\right) = 2$

(c) $lim\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right) = \frac{3}{2}$

(d) $lim\left(\frac{n^2-1}{2n^2+3}\right) = \frac{1}{2}$

6. Buktikan bahwa:

(a) $lim\left(\frac{1}{\sqrt{n+7}} = 0\right)$

(b) $lim\left(\frac{2n}{n+2}\right) = 2$

(c) $lim\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) = 0$

(d) $lim\left(\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right) = 0$

7. Misalkan $x_n := \frac{1}{\ln(n+1)}$ untuk $n \in N$

   (a) Gunakan definisi limit untuk menunjukkan $\lim(x_n) = 0$

   (b) Temukan nilai spesifik $K(\varepsilon)$ seperti yang diperlukan dalam definisi limit untuk masing-masing (i) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (ii) $\varepsilon = \frac{1}{10}$

8. Buktikan bahwa $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $(|x_n|) = 0$. Berikan contoh untuk menunjukkan bahwa kekonvergennan dari $(|x_n|)$ tidak mengimplikasikan kekonvergenan dari (x_n).

9. Tunjukkan bahwa jika $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$ dan $\lim(x_n) = 0$, maka $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$

10. Buktikan bahwa jika $\lim(x_n) = x$ dan jika $x > 0$, maka ada bilangan asli M sedemikian hingga itu $x_n > 0$ untuk semua $n \geq M$

11. Tunjukkan bahwa $lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0.$

12. Tunjukkan bahwa $lim\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = 0.$

13. Tunjukkan bahwa $lim\left(\frac{1}{3^n}\right) = 0.$

14. Misalkan $b \in R$ yang memenuhi $0 < b < 1$. Buktikan bahwa $\lim nb^n = 0$. [$Petunjuk$: gunakan $teorema\ binomial$ seperti pada contoh $\boldsymbol{C.8.4}$ (d)]

15. Tunjukkan bahwa $\lim\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) = 1$

16. Tunjukkan bahwa $lim\left(\frac{n^2}{n!}\right) = 0.$

17. Tunjukkan bahwa $lim\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 0.$ $\Big[Petunjuk\text{: jika n} \geq 3\text{, maka } 0 < \frac{2^n}{n!} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.\Big]$

18. Jika $\lim(\mathrm{x_n}) = x > 0$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $\mathrm{n} \geq \mathrm{K}$, maka $\frac{1}{2}x < x_n < 2x$.

$< blank >$

BAB IX

KEKONVERGENAN BARISAN BILANGAN REAL

A. Definisi dan Terminologi

Pada bagian ini akan diperoleh beberapa hasil yang memungkinkan untuk mengevaluasi limit-limit barisan bilangan real tertentu. Hasil ini akan memperluas koleksi sifat-sifat barisan konvergen. Dimulai dengan membangun sifat-sifat penting dari barisan konvergen yang akan diperlukan di bagian ini dan selanjutnya.

Definisi A.9.1: Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan terbatas jika ada bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Jadi, barisan (x_n) terbatas jika dan hanya jika $\{x_n : n \in N\}$ nilai-nilainya adalah subset terbatas dari R.

Sekarang akan didefinisikan operasi penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian barisan. Definisi ini akan memudahkan kita dalam memeriksa bagaimana proses limit berinteraksi dengan operasi-operasi tersebut.

Definisi A.9.2: Jika $X = (X_n)$, $Y = (Y_n)$ dan $Z = (Z_n)$ adalah barisan bilangan real serta $c \in R$, maka didefinisikan **jumlah, selisih, perkalian dan pembagian sebagai berikut:**

(i) $X + Y := (x_n + y_n)$

(ii) $X - Y := (x_n - y_n)$

(iii) $X.Y := (x_n . y_n)$

(iv) $cX := (cx_n)$.

(v) $X/Z = (x_n/z_n)$, dengan $z_n \neq 0$ untuk semua $n \in N$

B. Beberapa Teorema

Teorema B.9.1: Barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas

Bukti:

Anggaplah $lim(x_n) = x$ dan misalkan $\varepsilon = 1$. Maka ada bilangan asli $K = K(1)$ sedemikian hingga $|x_n - x| < 1$ untuk semua $n \geq K$. Dengan menerapkan Ketidaksamaan segitiga untuk $n \geq K$ diperoleh

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Jika diatur,

$$M \coloneqq \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{k-1}|, 1 + |x|\}$$

Maka berlakulah bahwa $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Catatan:

Model pembuktian lain menggunakan Bahasa $\varepsilon - neighborhood\ x$

Barisan bilangan real (x_n) konvergen adalah terbatas.

Jika $V_\varepsilon(x)$ adalah $\varepsilon - neighborhood\ x$ dengan $lim(x_n) = x$, maka semua kecuali sejumlah terhingga dari suku-suku barisan milik $V_\varepsilon(x)$. Oleh karena itu, karena $V_\varepsilon(x)$ dengan jelas terbatas dan himpunan terhingga juga terbatas, maka barisannya terbatas.

Teorema B.9.2: (a) Misalkan $X = (x_n)\ dan\ Y = (y_n)$ merupakan barisan bilangan real yang masing-masing konvergen ke x dan y, dan misalkan $c \in R$. Maka barisan $X + Y,\ X - Y,\ X.Y, dan\ cX$ masing-masing konvergen ke $x + y, x - y,\ xy,\ dan\ cx$.

(b) Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x dan $Z = (z_n)$ adalah barisan bilangan real tidak nol yang konvergen ke z dan jika $z \neq 0$, maka hasil bagi barisan X/Z konvergen ke x/z.

Bukti:

(a) Untuk menunjukkan bahwa $\lim(x_n + y_n) = x + y$, perlu diperkirakan besarnya $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Untuk melakukan ini digunakan $ketidaksamaan\ segitiga\ B.3.2$ untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |(x_n - x) + (y_n - y)| \end{aligned}$$

Karena $(x_n) \longrightarrow x$ jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K_1 sehingga jika $n \geq K_1$, maka $|x_n - x| < \varepsilon/2$;

Begitu juga karena $(y_n) \longrightarrow y$ ada bilangan asli K_2 sehingga jika $n \geq K_2$, maka $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Oleh karena itu jika dipilih $K(\varepsilon) \coloneqq \sup\{K_1, K_2\}$, berarti bahwa jika $n \geq K(\varepsilon)$ maka,

$$|(x_n + y_n) - (x - y)| \leq |(x_n - x) + (y_n - y)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, dapat disimpulkan bahwa $X + Y = (x_n + y_n)$ konvergen ke $x + y$.

Dengan argumen yang sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa $X - Y = (x_n - y_n)$ konvergen ke $(x - y)$.

Untuk menunjukkan bahwa $X.Y = (x_n.y_n)$ konvergen ke xy, dibuat perkiraan besarnya,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \\ &\leq |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| = |x_n||(y_n - y)| + |(x_n - x)||y| \end{aligned}$$

Menurut $teorema\ B.9.1$ terdapat bilangan real $M_1 > 0$ seperti pada $|x_n| \leq M_1$ untuk semua $n \in N$ dan jika ditetapkan $M := \sup\{M_1, |y|\}$. Maka diperoleh,

$$|x_n y_n - xy| \leq M|y_n - y| + M|x_n - x|$$

Dari kekonvergenan X dan Y kita simpulkan bahwa jika $\varepsilon > 0$ diberikan, maka ada bilangan asli K_1 dan K_2 sehingga jika $n \geq K_1$ maka $|x_n - x| < \varepsilon/2M$, dan jika $n \geq K_2$ maka $|y_n - y| < \varepsilon/2M$. Sekarang jika dimisalkan $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$; maka untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$ disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq M|y_n - y| + M|x_n - x| \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, ini membuktikan bahwa barisan bilangan real $X.Y = (x_n y_n)$ kenvergen ke xy.

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $cX = (cx_n)$ konvergen ke cx.

Atau tanpa mengurangi keumuman dapat mengambil Y menjadi barisan konstan $(c, c, c, \ldots.)$. maka didapat barisan $Y.X = (cx_n)$ konvergen ke cx.

(b) selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika $Z = (z_n)$ merupakan barisan bilangan tidak nol yang konvergen dengan $limit\ z$ tidak nol, maka barisan $(1/z_n)$ konvergen ke-kebalikannya yaitu $1/z$.

Pertama-tama misalkan $\alpha = \frac{1}{2}|z|$ berarti bahwa $\alpha > 0$. Karena $\lim(z_n) = z$, ada bilangan K_1 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$ maka $|z_n - z| < \alpha$. Dengan menggunakan $Corollary\ \boldsymbol{B.3.3}\ (i)$ dari

$(ketidaksamaan\ segitiga)$ yang $-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$untuk $n \geq K_1$, dapat ditulis bahwa $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$ untuk $n \geq K_1$. Oleh karena itu $1/|z_n| \leq 2/|z|$ untuk $n \geq K_1$ jadi diperkirakan

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right| = \frac{1}{|z_n z|}|z - z_n|$$

$$\leq \frac{2}{|z|^2}|z - z_n| \text{ untuk semua } n \geq K_1$$

Sekarang, jika diberikan $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli K_2 sehingga jika $n \geq K_2$ maka $|z_n z| < \frac{1}{2}\varepsilon|z|^2$. Oleh karena itu, jika ditetapkan $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$, maka $\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon$ untuk semua $n > K(\varepsilon)$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka

$$\lim\left(\frac{1}{z_n}\right) = \frac{1}{z}$$

Buktinya (b) telah selesai.

Dengan mengambil Y sebagai barisan $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ dan menggunakan fakta bahwa $X.Y = (x_n/z_n)$ konvergen ke $x\left(\frac{1}{z}\right) = x/z$.

Beberapa hasil perhitungan di atas, $teorema\ B.9.2$ dapat diperluas, untuk sejumlah terhingga barisan konvergen dengan menggunakan $Induksi\ Matematika$.

Misalnya, jika $A = (a_n), B = (b_n), \ldots., Z = (z_n)$ adalah barisan konvergen bilangan real, maka jumlah mereka $A + B + \cdots. + Z = (a_n + b_n + \cdots + z_n)$ adalah barisan konvergen dan

(1) $lim(a_n + b_n + \cdots + z_n) = lim(a_n) + lim(b_n) + lim(z_n)$ Juga perkaliannya $A.B \ldots.Z \coloneqq (a_n b_n \ldots z_n)$ adalah barisan konvergen dan

(2) $lim(a_n b_n \ldots z_n) = \big(lim(a_n)\big)\big(lim(b_n)\big) \ldots (lim(z_n))$

Oleh karena itu, jika $k \in N$ dan jika $A = (a_n)$ adalah barisan yang konvergen, maka

(3) $\lim(a_n^k) = (lim(a_n))^k$

bukti sebagai latihan.

Teorema B.9.3: Jika $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real konvergen dan jika $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$, maka $x = \lim(x_n) \geq 0$.

Bukti:

Anggaplah kesimpulannya tidak benar dan bahwa $x < 0$; maka $\varepsilon := -x$ adalah positif. Karena X konvergen ke x, ada bilangan asli K sedemikian hingga $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$.

Secara khusus, diperoleh $x_k < x + \varepsilon = x + (-x) = 0$. Tetapi ini bertentangan dengan hipotesis bahwa $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$. Dengan demikian, kontradiksi. Jadi haruslah $x \geq 0$.

Teorema B.9.4: Jika $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real konvergen dan jika $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in N$, maka $lim\,(x_n) \leq lim(y_n)$.

Bukti:

Misalkan $z_n = y_n - x_n$ berarti $Z = (z_n) = Y - X$ dan $z_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$ menggunakan $teorema\ B.9.2$ dan $B.9.3$ diperoleh,

$$0 \leq lim\ Z = lim(y_n) - lim(x_n),$$

sehingga $lim\,(x_n) \leq lim(y_n)$.

Hasil selanjutnya menegaskan bahwa jika semua suku-suku dari barisan konvergen memenuhi ketidaksamaan yang berbentuk

$a \leq x_n \leq b$, maka limit dari barisan itu memenuhi ketidaksamaan yang sama.

Teorema B.9.5: Jika $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real konvergen dan jika $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n \in N$, maka $a \leq lim(x_n) \leq b$.

Bukti:

Misalkan Y adalah barisan konstan $(b, b, b \ldots \ldots .)$ $teorema\, B.9.4$ mengimplikasikan itu $lim\, X \leq lim\, Y = b$ demikian pula dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $a \leq \lim \mathrm{X}$.

Hasil selanjutnyan menegaskan jika barisan Y diperas antara dua barisan itu konvergen ke batas yang sama, maka itu juga harus menyatu dengan batas ini.

Teorema B.9.6 (Squeeze): Misalkan itu $X = (x_n), Y = (y_n)$ dan $Z = (z_n)$ adalah barisan bilangan real sedemikian hingga $x_n \leq y_n \leq z_n$ untuk semua $n \in N$ dan $lim(x_n) = lim(z_n)$. Maka $Y = (y_n)$ adalah konvergen dan $lim(x_n) = lim(y_n) = lim(z_n)$.

Bukti:

Misalkan $w = lim(x_n) = lim(z_n)$, jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka akibat kekonvergenan X dan Z ke w, bahwa ada bilangan asli K sedemikian hingga untuk semua $n \geq k$ maka,

$$|x_n - w| < \varepsilon \; dan \; |z_n - w| < \varepsilon$$

Menurut hipotesis,

$$x_n \leq y_n \leq z_n \Leftrightarrow x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$$
$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$$

Untuk semua $n \geq k$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, ini berarti bahwa $\lim(y_n) = w$

Teorema B.9.7: Misalkan barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka barisan nilai mutlak $(|x_n|)$ konvergen ke $|x|$, yaitu bila $x = lim\ (x_n)$, maka $|x| = lim\ (|x_n|)$

Bukti :

Menggunakan sifat ketaksamaan segitiga diperoleh $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$ untuk semua $n \in N$. Selanjutnya kekonvergenan dari $(|xn|)$ ke $|x|$ suatu akibat langsung dari kekonvergenan dari (x_n) ke x.

Teorema B.9.8: Misalkan barisan bilangan real $X = (x_n)$ konvergen ke x dan $x_n \geq 0$, untuk semua $n \in N$. Maka barisan akar pangkat dua $(\sqrt{x_n})$ konvergen dan $lim\ (\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$.

Bukti:

Dari $teorema\ B.9.3$ diperoleh bahwa $x = lim\ (x_n) \geq 0$.

Sekarang kita tinjau dua kasus $(i)\ x = 0$ dan $(ii)\ x > 0$.

(i) Misalkan $x = 0$, dan $\varepsilon > 0$ sebarang diberikan. Karena $x_n \rightarrow 0$ maka terdapat $K \in N$ sehingga $0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2$.

Karena itu $[lihat\ contoh\ 4(i)\ hal.30]$, $0 \leq \sqrt{x_n} \leq \varepsilon$ untuk $n \geq K$.

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $(\sqrt{x_n}) \rightarrow 0$.

(ii) Bila $x > 0$, maka $\sqrt{x} > 0$ dan kita mempunyai

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}$$

Karena $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, maka

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} |x_n - x|$$

Kekonvergenan dari $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$ merupakan akibat dari fakta $x_n \to x$.

Teorema B.9.9: Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan real positif sedemikian hingga $L = lim(x_{n+1}/x_n)$ ada. Jika $L < 1$, maka (x_n) konvergen dan $lim(x_n) = 0$.

Bukti:

Dengan $teorema\ B.9.3$ yang mengikuti bahwa $L \geq 0$. Misalkan r bilangan sedemikian hingga $L < r < 1$, dan misalkan $\varepsilon = r - L > 0$. Ada $K \in N$ sehingga jika $n \geq K$ maka

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \varepsilon$$

Argumen ini dapat diikuti sebagai berikut:

bahwa jika $n \geq K$, maka

$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon = L + (r - L) = r$ atau $\frac{x_{n+1}}{x_n} < r$ atau $x_{n+1} < x_n r$

Karena itu, jika $n \geq K$, diperoleh

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < \cdots < x_k r^{n-k+1}$$

Jika diatur $C := x_k/r^k$, kita melihat bahwa $0 < x_{n+1} < x_k r^{n-k+1} = Cr^{n+1}$ untuk semua $n \geq K$. Karena $0 < r < 1$, ini menurut contoh $C.8.4(b)$ bahwa $\lim(r^n) = 0$ dan karena itu dari $Teorema\ B.8.4$ bahwa $\lim(x_n) = 0$

C. Contoh-Contoh

Contoh C.9.1

Jika, X dan Y adalah barisan bilangan real

$X := (2, 4, 6, \dots, 2n),\ \ dan\ \ Y := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}. \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right)$

Maka:

$X + Y = \left(\frac{3}{1}, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, \dots, \frac{2n^2 + 1}{n}\right)$

$X - Y = \left(\frac{1}{1}, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \dots, \frac{2n^2 - 1}{n}\right)$

$X.Y = (2, 2, 2, 2, \dots., 2. \dots.)$

$3X = (6, 12, 18, \dots, 6n)$

$X/Y = (2, 8, 18, \dots., 2n^2)$

Misalkan $Z := (0, 2, 0, \dots, (-1)^n)$

maka kita dapat mendefinisikan $X + Z, X - Z\ dan\ X.Z$, tetapi $X\ /\ Z$ tidak didefinisikan karena beberapa suku dari Z ada yang nol.

$Catatan$:

Jika barisan bilangan real diperoleh dengan menerapkan operasi sesuai dengan $definisi\ A.9.2$ maka limit barisan tersebut dapat diprediksi kekonvergenannya.

Contoh C.9.2:

(a) Barisan bilangan real (n) divergen.

Menggunakan $teorema\ B.9.1$, andaikan barisan $X = (n)$ konvergen, maka terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga $n = |n| < M$ untuk semua $n \in \mathrm{N}$. Tetapi hal ini bertentangan dengan $sifat\ Archimedes$. Jadi haruslah (n) divergen.

(b) Barisan $((-1)^n)$ divergen.

Barisan ini terbatas (ambil $M = 2$), sehingga tidak dapat digunakan $teorema\, B.9.1.$ Karena itu, andaikan $X = ((-1)^n)$ konvergen dan $\mathrm{a} = lim\, X$. Misalkan $\varepsilon = 1$, maka terdapat K_1 sedemikian hingga $|(-1)^n - a| < 1$, untuk semua $n \geq K_1$. Tetapi bila n ganjil dan $n \geq K_1$, hal ini memberikan $|-1 - a| < 1$, sehingga $-2 < \mathrm{a} < 0$. Sedangkan bila n genap dan $n \geq K_1$, hal ini memberikan $|1 - a\,| < 1$ sehingga $0 < a < 2$. Karena a tidak mungkin memenuhi kedua ketaksamaan tersebut, maka pengandaian bahwa X konvergen menghasilkan hal yang kontradiksi. Jadi Haruslah X divergen.

(c) $lim\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 2$

Misalkan $X = (2\,)$ dan $Y = \left({}^{1}\!/_{n}\right)$ kemudian $\left({}^{(2n\,+\,1)}\!/_{n}\right) = X + Y$

Dengan menggunakan $teorema\, B.9.2\ (a)$ diperoleh bahwa

$lim(X + Y) = lim\, X + lim\, Y = 2 + 0 = 2$

(d) $\lim\left({}^{2n\,+\,1}\!/_{n\,+\,5}\right) = 2$

Karena barisan $(2n + 1)$ dan $(n + 5)$ tidak onvergen, kita tidak dapat menggunakan $teorema\, B.9.1\ (b)$ secara langsung. Tetapi kita dapat melakukan yang berikut

$$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{2 + {}^{1}\!/_{n}}{1 + {}^{5}\!/_{n}}$$

yang memberikan $X = 2 + {}^{1}/_{n}$ dan $Z = 1 + {}^{5}/_{n}$ sehingga $teorema\ B.9.1\ (b)$ dapat digunakan.

$(Selidiki\ terlebih\ dahulu\ syarat - syarat\ yang\ harus\ dipenuhi).$

Selanjutnya diperoleh $lim\, X = 2$ dan $lim\, Z = 1 \neq 0$, jadi

$lim\left({}^{2n + 1}/_{n + 5}\right) = {}^{2}/_{1} = 2$

(e) $lim\left(\frac{2n}{n^2+1}\right) = 0$

Disini $Teorema\ B.9.2(b)$ tidak dapat digunakan secara langsung, Perhatikan persamaan berikut

$$\frac{2n}{n^2 + 1} = \frac{2}{n + {}^{1}/_{n}}$$

(mengapa ?). Tetapi karena $(n + {}^{1}/_{n})$ tidak konvergen

$$\frac{2n}{n^2 + 1} = \frac{{}^{2}/_{n}}{1 + {}^{1}/_{n^2}}$$

dengan menggunakan $teorema\ B.9.2(b)$, $lim({}^{2}/_{n}) = 0$ dan

$lim\left(1 + {}^{1}/_{n^2}\right) = 1 \neq 0$ maka $lim\left({}^{2n}/_{(n^2 + 1)}\right) = {}^{0}/_{1} = 0$

(f) $lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$

Di sini $teorema\ B.9.2(b)$ tidak dapat digunakan secara langsung. Tetapi perlu dicatat bahwa $-1 \leq sin\, n \leq 1$, maka

$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ untuk semua $n \in N$.

Karena $lim(-{}^{1}/_{n}) = 0 = lim({}^{1}/_{n})$, dengan menggunakan

$teorema\ squeeze$ diperoleh bahwa $lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$

(g) Misalkan $X = (x_n)$ barisan yang konvergen ke x. Sedangkan p polinomial, sebagai contoh $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k$ dengan $k \in N$ dan $a_j \in R$ untuk $j = 0, 1, \ldots, k, a_k \neq 0$. Dengan menggunakan $teorema\ B.9.1$ barisan $(p(x_n))$ konvergen ke $p(x)$. Bukti lengkapnya sebagai latihan.

(h) Misalkan $X = (x_n)$ barisan yang konvergen ke x. Sedangkan $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ dengan *p* dan *q* polinomial. Misalkan juga $q(x_n) \neq 0$ untuk semua $n \in N$ dan $q(x) = 0$. Maka barisan $r(x_n)$ konvergen ke $r(x)$.

Bukti lengkapnya sebagai latihan.

Contoh C.9.3:

Sebagai ilustrasi penggunaan $teorema\ B.9.9$, $\lim\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0$

Pandanglah barisan (x_n) oleh $x_n := n/2^n$ dan $x_{n+1} := {n+1}/{2^{n+1}}$

Sehingga diperoleh,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$$

Sehingga $lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \frac{1}{2}$. Karena $\frac{1}{2} < 1$, ini menurut $Teorema\ B.9.9$ bahwa $\lim\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0$

D. Latihan 9

1. Untuk x_n yang diberikan berikut, tunjukkan kekonvergenan atau kedivergenan dari $X = (x_n)$

   (a) $x_n = \frac{n}{n+1}$

   (b) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$

   (c) $x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$

   (d) $x_n = \frac{2n^2+3}{n+1}$

2. Berikan contoh barisan X dan Y yang divergen, tetapi jumlahnya $X + Y$ konvergen.

3. Berikan contoh barisan X dan Y yang divergen, tetapi perkaliannya $X \cdot Y$ konvergen

4. Tunjukkan bahwa bila X dan Y barisan sedemikian hingga X dan $X + Y$ konvergen, maka Y konvergen.

5. Tunjukkan bahwa bila X dan Y barisan sedemikian hingga X konvergen ke $x \neq 0$ dan XY konvergen, maka Y konvergen.

6. Tunjukkan bahwa barisan berikut tidak konvergen.

   (a) (2^n)

   (b) $((-1)^n n^2)$

7. Tentukan limit dari barisan-barisan berikut:

   (a) $lim\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

   (b) $lim\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\right)$

   (c) $lim\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)$

   (d) $lim\left(\frac{n+1}{n\sqrt{n}}\right)$

8. Jika (b_n) barisan yang terbatas dan $\lim(a_n) = 0$, maka tunjukkan $\lim(a_n b_n) = 0$, jelaskan mengapa $teorema\ B.9.2$ tidak bisa digunakan.

9. Jelaskan mengapa hasil persamaan (3) sebelum $teorema\ B.9.3$ tidak bisa digunakan untuk menghitung limit dari barisan $\left((1 + {}^{1}/_{n})^{n}\right)$

10. Misalkan $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ untuk $n \in N$. Tunjukkan bahwa (y_n) dan $(\sqrt{n} y_n)$ konvergen.

11. Tentukan limit barisan berikut.

    (a) $(\sqrt{4n^2 + n} - 2n)$

    (b) $(\sqrt{n^2 + 5n} - n)$

12. Tentukan limit barisan berikut.

    (a) $\lim\left((3\sqrt{n})^{1/2n}\right)$

    (b) $\lim\left((n+1)^{1/\ln(n+1)}\right)$

13. jika $0 < a < b$, tentukan $\lim\left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}\right)$

14. jika $a > 0, b > 0$, maka tunjukkan $lim\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) = {}^{(a+b)}/_{2}$

15. Gunakan teorema $B.9.6$ $(squeeze)$ untuk menentukan limit sebagai berikut,

    (a) $\left(n^{1/n^2}\right)$

    (b) $\left((n!)^{1/n^2}\right)$

16. Misalkan $z_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ dengan $0 < a < b$, maka $lim(z_n) = b$.

17. Gunakan $Teorema$ $3.2.11$ pada barisan-barisan berikut, bila a, b memenuhi $0 < a < 1$ dan $b > 1$
    (a) (a^n)
    (b) $\left(\frac{b^n}{2^n}\right)$
    (c) $\left(\frac{n}{b^n}\right)$
    (d) $\left(2^{3n}/3^{2n}\right)$
18. (a). Berikan contoh barisan bilangan positif (x_n) yang konvergen sehingga $lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1$

    (b). Berikan pula contoh barisan divergen dengan sifat tersebut. (Jadi, sifat ini tidak dapat digunakan untuk uji konvergensi).
19. Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan positif sehingga $lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L > 1$. Tunjukkan bahwa X barisan tak terbatas, karenanya X tidak konvergen.
20. Selidiki konvergensi barisan-barisan berikut, bila a, b memenuhi $0 < a < 1$ dan $b > 1$
    (a) $(n^2 a^n)$
    (b) $\left(\frac{b^n}{n^2}\right)$
    (c) $\left(\frac{b^n}{n!}\right)$
    (d) $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$
21. Misalkan (x_n) barisan bilangan positif dengan $lim\left(x_n^{1/n}\right) = L < 1$. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan dengan $0 < r <$

1 sehingga $0 < x_n < r^n$ untuk suatu $n \in N$ yang cukup besar. Gunakan ini untuk menunjukkan $\lim(x_n) = 0$.

22. (a) Berikan contoh barisan bilangan positif (x_n) yang konvergen sehingga $\lim\left(x_n^{1/n}\right) = 1$.

    (b) Berikan contoh barisan bilangan positif (x_n) yang divergen sehingga $\lim\left(x_n^{1/n}\right) = 1$. (Jadi, sifat ini tidak dapat digunakan untuk uji konvergensi).
23. Misalkan (x_n) barisan konvergen dan (y_n) barisan sehingga untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat M sehingga $|x_n - y_n| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq M$. Apakah hal ini mengakibatkan (y_n) konvergen?
24. Tunjukkan (x_n) dan (y_n) merupakan barisan yang konvergen, maka barisan (u_n) dan (v_n) didefinisikan dengan (u_n) = sup$\{x_n, y_n\}$ dan v_n = inf$\{x_n, y_n\}$ juga konvergen.
25. Misalkan $(x_n), (y_n)$ dan (z_n) adalah barisan konvergen, maka barisan (w_n) di definisikan dengan (w_n) = mid(x_n, y_n, z_n) juga konvergen.

$< \boldsymbol{blank} >$

BAB X

BARISAN BILANGAN REAL MONOTON

A. Definisi dan Terminologi

Pada bab sebelumnya telah diperoleh beberapa metode untuk menunjukkan bahwa barisan bilangan real $X = (x_n)$ adalah konvergen:

(i) Dapat digunakan secara langsung $Definisi\, A.8.2$ atau $Teorema\, B.8.2$. Metode ini sering (tetapi tidak selalu digunakan) sulit dilakukan.

(ii) $|x_n - x|$ dapat dituliskan dengan kelipatan dari suku barisan (a_n) yang diketahui konvergen ke 0, dan menggunakan $Teorema\, B.8.4$.

(iii) X dapat diidentifikasi sebagai barisan yang diperoleh dari barisan lain yang telah diketahui konvergen dengan mengambil ekor, kombinasi aljabar, nilai absolut, atau akar kuadrat, dan menggunakan $Teorema\, B.8.3, B.9.2, B.9.7$, atau $Teorema\, B.9.8$.

(iv) Barisan bilangan real X dapat "diselipkan" antara dua barisan yang memiliki limit sama dan gunakan $Teorema\ squeeze$.

(v) Kita dapat menggunakan "uji rasio" dari $teorema\, B.9.9$

Kecuali untuk (iii), semua metode ini mensyaratkan bahwa kita sudah tahu (atau setidaknya klaim nilai limit, dan kemudian diverifikasi bahwa klaimnya benar.

Namun ada banyak contoh, di mana tidak ada kandidat yang jelas untuk limit suatu barisan, meskipun analisis awal mungkin menunjukkan bahwa konvergensi mungkin terjadi. Dalam ini dan dua bagian berikutnya, kami akan menetapkan hasil yang dapat digunakan untuk menunjukkan barisan konvergen meskipun nilai limitnya tidak diketahui. Metode yang diperkenalkan di bagian ini lingkupnya lebih terbatas daripada dua metode yang diberikan di berikutnya, tetapi jauh lebih mudah untuk dikerjakan. Ini berlaku untuk barisan yang monoton.

Definisi A.10.1: Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. X dikatakan $increasing$ (naik) jika dan hanya jika memenuhi pertidaksamaan

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$$

X dikatakan $decreasing$ (turun) jika dan hanya jika memenuhi pertidaksamaan

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$

X dikatakan $monotone$ (monoton) jika dan hanya jika memenuhi salah satu $increasing\ atau\ decreasing$.

B. Beberapa Teorema

Teorema B.10.1: ($Konvergensi\ Monoton$) Suatu barisan bilangan real monoton adalah konvergen jika dan hanya jika terbatas.

Lebih lanjut

a) Jika $X = (x_n)$ adalah barisan $increasing$ (naik) yang terbatas, maka

$$lim(x_n) = sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

b) Jika $Y = (y_n)$ adalah barisan $decreasing$ (turun) terbatas, maka

$$lim(y_n) = inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Bukti:

Dalam $Teorema\ B.9.1$ terlihat bahwa barisan konvergen adalah terbatas.

Sebaliknya, misalkan X adalah barisan monoton yang terbatas. Maka X $increasing$ atau $decreasing$.

a) Kasus pertama di mana $X = (x_n)$ adalah barisan terbatas $increasing$. Karena X adalah terbatas, ada bilangan real M sedemikian sehingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in N$. Menurut aksioma kelengkapan $(halaman\ 47)$, supremum $x^* = sup\{x_n: n \in N\}$ ada di R; akan ditunjukkan bahwa $x^* = lim(x_n)$.

   Jika $\varepsilon > 0$ diberikan, maka $x^* - \varepsilon$ bukan batas atas dari $\{x_n: n \in N\}$ dan karenanya terdapat x_K sedemikian hingga $x^* - \varepsilon < x_K$. Kenyataan bahwa X adalah barisan yang $increasing$ menyaratkan $x_K \leq x_n$ setiap kali $n \geq K$, maka

   $x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon$ untuk semua $n \geq K$

   Karena itu dapat ditulis

   $$|x_n - x^*| < \varepsilon \text{ untuk semua } n \geq K$$

   Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, dapat disimpulkan bahwa (x_n) konvergen ke x^*. Jadi $lim(x_n) = x^* = sup\{x_n: n \in N\}$

b) Jika $Y = (y_n)$ adalah barisan yang terbatas $decreasing$, maka jelaslah bahwa $X := -Y = (-y_n)$ adalah barisan yang terbatas $increasing$. Itu ditunjukkan pada bagian (a) bahwa $lim\,X = sup\{-y_n: n \in N\}$, Sekarang $\lim X = -\lim Y$ dan juga, dengan $teorema\ B.5.2$, diperoleh,

$$sup\{-y_n: n \in N\} = inf\{y_n: n \in N\}$$

Oleh karena itu, $limY = -limX = inf\{y_n: n \in N\}$.

Teorema Konvergensi Monoton menetapkan eksistensi limit sebuah barisan monoton yang terbatas. Ini juga memberi kita cara menghitung limit barisan asalkan kita dapat mengevaluasi $supremum$ dalam kasus (a), atau $infimum$ dalam kasus (b). Terkadang sulit untuk mengevaluasi $supremum$ ini (atau $infimum$), namun begitu diketahui bahwa limitnya ada.

C. Contoh-Contoh

Contoh C.10.1:

Barisan berikut adalah $increasing$:

$$(1,2,3,4, \dots, n, \dots),$$

$$(1,2,2,3,3,3, \dots)$$

$$(a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots) \quad jika \quad a > 1$$

Barisan berikut adalah $decreasing$:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}^2, \dots, \frac{1}{2}^{n-1}, \dots\right)$$

$$(b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots) \quad 0 < b < 1$$

Barisan berikut tidak monoton:

$$(+1, -1, +1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$$

$$(-1, +2, -3, \dots, (-1)^n n \dots)$$

Barisan berikut tidak monoton, tetapi mereka "$\boldsymbol{akhirnya}$" monoton:

$$(7,6,2,1,2,3,4,\dots)$$

$$\left(-2,0,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right)$$

Contoh $\boldsymbol{C.10.2}$**:**

(a) $lim\left(\frac{1}{(\sqrt{n})}\right)=0.$

Adalah mungkin untuk menangani barisan ini dengan menggunakan $teorema\,B.9.8$; Namun, dalam kasus ini akan digunakan Teorema Konvergensi Monoton. Jelas 0 adalah batas bawah untuk set $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}:n\in\mathbb{N}\right\}$, dan tidak sulit untuk menunjukkan bahwa 0 adalah infimum dari himpunan $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}:n\in\mathbb{N}\right\}$; maka $0=lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Di sisi lain, begitu kita tahu bahwa $X:=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ terbatas dan $decreasing$, diketahu bahwa itu konvergen ke suatu bilangan real x. Karena $X=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ konvergen ke x, menurut $teorema\,B.9.2$ bahwa $X.X=\frac{1}{n}$ konvergen ke x^2. Oleh karena itu $x^2=0$, jadi $x = 0$.

(b) Misalkan $h_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ untuk $n\in\mathbb{N}$. Karena $h_{n+1}=h_n+\frac{1}{(n+1)}>h_n$, kita melihat bahwa (h_n) adalah barisan yang increasing. Menurut $teorema\,B.10.1\,(Konvergensi\ Monoton)$, pertanyaan apakah barisannya konvergen atau tidak direduksi menjadi pertanyaan apakah barisannya terbatas atau tidak. Upaya untuk digunakan perhitungan numerik langsung untuk sampai pada dugaan tentang keterbatasan dari barisan (h_n) mengarah ke frustrasi yang tidak yang tidak dapat disimpulkan. Menjalankan komputer akan mengungkapkan nilai perkiraan $h_n \approx 11{,}4$ untuk $n = 50.000$, dan $h_n \approx 12{,}1$ untuk $n = 100.000$. Seperti itu fakta numerik dapat menyebabkan pengamat biasa menyimpulkan bahwa barisannya terbatas. Namun, barisan sebenarnya divergen, yang ditunjukkan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} h_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Karena (h_n) tidak terbatas, $teorema\ B.9.1$ mengimplikasikan bahwa barisan tersebut $divergen$. (Ini membuktikan deret itu tak terbatas yang dikenal sebagai $deret\ harmonic$, akan dibahas pada $bab\ xiv$)

Suku-suku h_n $increasing$ sangat lambat. Misalnya, dapat ditunjukkan bahwa untuk mencapai $h_n > 50$ akan memerlukan sekitar $5{,}2 \times 10^{21}$ pejumlahan, dan kinerja komputer normal 400 juta penjumlahan per detik membutuhkan lebih dari 400.000 tahun untuk menampilkan perhitungan ($jika\ ada\ 31.536.000\ detik\ dalam\ setahun$). Super komputer yang bisa menampilkan hasil penjumlahan lebih dari satu triliun per detik akan membutuhkan waktu lebih dari 164 tahun untuk mencapai tujuan yang paling sederhana. Dan super komputer

$IBM\ Roadrunner$ dengan kecepatan operasi kuadriliun perdetik akan memakan waktu satu setengah tahun.

Barisan yang didefinisikan secara induktif harus diperlakukan berbeda. Jika barisan seperti itu diketahui konvergen, maka nilai limit terkadang dapat ditentukan dengan menggunakan relasi induktif.

Contoh C.10.3:

Misalnya, barisan bilangan real telah diketahui $konvergen$ (x_n) didefinisikan oleh

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Jika dimisalkan $x = lim(x_n)$, maka kita juga memiliki $x = lim(x_{n+1})$ karena $1 - ekor$ (x_{n+1}) konvergen ke limit yang sama. Selanjutnya, diketahui bahwa $x_n \geq 2$, begitu juga $x \neq 0$ dan $x_n \neq 0$ untuk semua $n \in N$.

Oleh karena itu, dapat diterapkan teorema limit untuk barisan sehingga diperoleh,

$$x = lim_{(n+1)} = 2 + \frac{1}{lim(x_n)} = 2 + \frac{1}{x}$$

Jadi, limit x adalah solusi persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 1 = 0$, dan karena x harus bernilai positif, maka dapat ditemukan bahwa limit barisannya adalah $x = 1 + \sqrt{2}$.

Tentu saja, masalah konvergensi tidak boleh diabaikan atau dianggap biasa.

Contoh $C.10.4$:

Jika diasumsikan barisan (y_n) didefinisikan secara induktif oleh $y_1 := 1$, $y_{n+1} := 2y_n + 1$ adalah konvergen dengan limit y, maka dapat diperoleh $y = 2y + 1$, sehingga $y = -1$. Tentu saja ini mustahil.

Dalam contoh berikut, kami menggunakan metode ini untuk mengevaluasi limit, tetapi hanya setelah membangun konvergensi dengan menggunakan $Teorema\ Konvergensi\ Monoton$.

Contoh $C.10.5$:

(a) Misalkan $Y = (y_n)$ didefinisikan secara induktif oleh $y_1 := 1, y_{n+1} := \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ untuk $n \geq 1$. Kami akan ditunjukkan bahwa $lim\, Y = \frac{3}{2}$.

Penghitungan langsung menunjukkan bahwa $y_2 = \frac{5}{4}$. Maka kita memiliki $y_1 < y_2 < 2$. Kami menunjukkan, oleh Induksi, bahwa $y_n < 2$ untuk semua $n \in N$. Memang, ini benar untuk $n = 1{,}2$. Jika $y_k < 2$ berlaku untuk beberapa $k \in N$, sehingga

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(4 + 3) = \frac{7}{4} < 2$$

Oleh karena itu $y_{k+1} < 2$ dimana $y_n < 2$ untuk semua $n \in N$

Sekarang ditunjukkan, dengan $Induksi$, bahwa $y_n < y_{n+1}$ untuk semua $n \in N$. Kebenaran dari pernyataan ini telah diverifikasi untuk $n = 1$. Sekarang anggaplah bahwa $y_k < y_{k+1}$ untuk beberapa k; lalu $2y_k + 3 < 2y_{k+1} + 3$, (berturut-turut dikalikan 2 dan ditambahkan 3) sehingga,

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) = y_{k+2}$$

Jadi $y_k < y_{k+1}$ mengimplikasikan bahwa $y_{k+1} < y_{k+2}$. Dengan demikian $y_n < y_{n+1}$ untuk semua $n \in N$.

Telah ditunjukkan bahwa barisan $Y = (y_n)$ $increasing$ dan terbatas di atas oleh 2. Menurut $Teorema\ Konvergensi\ Monoton$ bahwa Y konvergen dengan limit yang paling besar 2. Dalam hal ini tidak begitu mudah untuk mengevaluasi $lim(y_n)$ dengan menghitung sup $\{y_n : n \in N\}$. Namun, ada cara lain untuk mengevaluasi limitnya. Karena $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ untuk semua $n \in N$, suku ke n di dalam $1 - ekor\ Y_1$ dari Y memiliki relasi aljabar sederhana untuk suku ke n dari Y. Karena, menurut $teorema\ B.8.3$ tentang ekor barisan, berlakulah $y := lim\,Y_1 = lim\,Y$, karena itu menurut $teorema\ B.9.2$

$$y = \frac{1}{4}(2y + 3)$$

Sehingga diperoleh $y = \frac{3}{2}$

(b) Misalkan $Z = (z_n)$ menjadi barisan bilangan real yang didefinisikan oleh $z_1 := 1, z_{n+1} := \sqrt{2z_n}$, untuk $n \in N$. Akan ditunjukkan bahwa $lim(z_n) = 2$. Perhatikan bahwa $z_1 = 1$ dan $z_2 = \sqrt{2}$; maka $1 \leq z_1 < z_2 < 2$. Di klaim bahwa barisan Z $increasing$ dan terbatas di atas oleh 2. Untuk menunjukkan ini akan ditunjukkan, dengan Induksi, itu $1 \leq z_n < z_{n+1} < 2$ untuk semua $n \in N$. Fakta ini telah diverifikasi untuk n = 1. Anggaplah demikian benar untuk $n = k$; maka $2 \leq 2z_k < 2z_{k+1} < 4$, dari mana itu mengikuti (mengapa?) Itu

$$1 < \sqrt{2} \leq z_{k+1} = \sqrt{2z_k} < z_{k+2} = \sqrt{2z_{k+1}} < \sqrt{4} = 2$$

[langkah terakhir ini telah digunakan langkah-langkah seperti $Contoh\ 4(i)\ halaman\ 30$]

Validitas ketidaksamaan $1 \leq z_k < z_{k+1} < 2$ mengimplikasikan validitas $1 \leq z_{k+1} < z_{k+2} < 2$. Oleh karena itu $1 \leq z_n < z_{n+1} < 2$ untuk semua $n \in N$

Karena $Z = (z_n)$ adalah barisan $increasing$ yang terbatas, maka menurut $Teorema\ Konvergensi\ Monoton$ konvergen ke bilangan $z := sup\{z_n\}$. Dapat ditunjukkan secara langsung $sup\ \{z_n\} = 2$, sehingga $z = 2$. Atau kita dapat menggunakan metode yang digunakan dalam bagian (a). Relasi $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$:, diberikan relasi antara suku ke-n dari $ekor - 1\ Z_1$ dari Z dan suku-suku ke-n dari Z. Dengan menggunakan $teorema\ B.8.3$, diperoleh $lim\, Z_1 = z = lim\, Z$. Selain itu, menurut $teorema\ B.9.2\ dan\ B.9.8$, maka limit z harus memenuhi relasi

$$z = \sqrt{2z}$$

Maka z harus memenuhi persamaan $z^2 = 2z$, yang memiliki akar $z = 0$, 2. Karena ketentuan $z = (z_n)$ semua memenuhi $1 \leq z_n \leq 2$, dengan mengikuti $teorema\ B.9.5$ yang harus memenuhi $1 \leq z_n \leq 2$. Dengan demikian $z = 2$.

Contoh C.10.6: $Aplikasi\ teorema\ konvergensi\ monoton$ untuk:

(1) Perhitungan Akar Kuadrat

Misalkan $a > 0$; kita akan mengkontruksi barisan bilangan real (s_n) yang konvergen ke $\sqrt{a}$.

Misalkan $s_1 > 0$ sebarang dan definisikan $s_{n+1} := \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right)$ untuk $n \in N$. Sekarang ditunjukkan bahwa barisan (s_n) konvergen ke $\sqrt{a}$. ($Proses\ ini\ untuk\ menghitung\ akar\ kuadrat\ telah\ dikenal\ di\ Mesopotamia$ 1500 $tahun\ sebelum\ masehi$)

Kami pertama kali menunjukkan bahwa $s^2{}_n \geq a$ untuk $n \geq 2$. Karena s_n memenuhi persamaan kuadrat $s^2{}_n - 2s_{n+1} + a = 0$, persamaan ini memiliki akar real. Oleh karena itu diskriminannya $4s^2{}_{n+1} - 4a$ harus positif; yaitu, $s^2{}_{n+1} \geq a$ untuk $n \geq 1$.

Untuk melihat bahwa s_n adalah barisan yang decreasing di akhir, perhatikan bahwa untuk $n \geq 2$ diperoleh,

$$s_n - s_{n-1} = s_n - \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s^2{}_n - a)}{s_n} \geq 0$$

Oleh karena itu, $s_{n+1} \leq s_n$ untuk semua $n \geq 2$. $Teorema\ Konvergensi\ Monoton$ menyatakan bahwa $s := lim(s_n)$ ada. Selain itu, dari $teorema\ B.9.2$, limit s harus memenuhi relasi

$$s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$$

Sesuai $teorema\ B.8.3$ sehingga $s = \frac{a}{s}$ atau $s^2 = a$.

Jadi $s = \sqrt{a}$.

Untuk keperluan perhitungan, seringkali penting untuk memiliki perkiraan seberapa cepat Barisan (s_n) konvergen dengan $\sqrt{a}$. Seperti di atas, kami punya $\sqrt{a} \leq s_n$ untuk semua $n \geq 2$, berarti bahwa $\frac{a}{s_n} \leq \sqrt{a} \leq s_n$. Demikian diperoleh,

$$0 \leq s_n - \sqrt{a} \leq s_n - \frac{a}{s_n} = \frac{(s^2{}_n - a)}{s_n} \text{ untuk } n \geq 2$$

Dengan menggunakan ketidaksamaan ini kita dapat menghitung $\sqrt{a}$ untuk tingkat akurasi yang diinginkan.

(2) bilangan Euler

Misalkan $e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ untuk $n \in N$. Sekarang kita akan menunjukkan bahwa barisan $E = (e_n)$ terbatas dan $increasing;$ karena itu konvergen.

Limit dari barisan ini terkenal dengan nama $bilangan\ Euler\ e$ yang, nilainya diperkirakan $2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots$, yang mana diambil sebagai basis logaritma asli ($logarithm\ natural\ ln$).

Jika diterapkan $Teorema\ Binomial$ diperoleh,

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

Jika kita membagi pangkat n ke dalam pembilang suku-suku dari koefisien binomial, kita mendapatkan

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Dengan cara yang sama diperoleh,

$$e_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Perhatikan bahwa ekspresi untuk e_n memuat $n+1$ suku, sedangkan untuk e_{n+1} mengandung $n+2$ suku. Selain itu, setiap suku yang muncul dalam e_n kurang dari atau sama dengan suku yang sesuai di e_{n+1}, dan e_{n+1} memiliki satu lagi suku positif. Karena itu dapat dituliskan $2 \leq e_1 < e_2 < \cdots < e_n < e_{n+1} < \cdots$, Sehingga persyaratan $E\ increasing$ dipenuhi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa suku-suku barisan E terbatas di atas, perlu dicatat bahwa jika $p = 1,2,\cdots,n$, lalu $\left(1-\frac{p}{n}\right) < 1$. Apalagi $2^{p-1} \leq p!$ [$lihat\ contoh\ 12\ halaman\ 74\ buku\ pengantar\ dasar\ matematika\ dengan\ penulis\ yang\ sama$] sehingga $\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$. Karena itu, jika $n > 1$, diperoleh:

$$2 < e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Karena dapat diverifikasi bahwa [$gunakan\ induksi\ matematika$]

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

Dapat disimpulkan bahwa $2 < e_n < 3$ untuk semua $n \in N$. Menurut Teorema Konvergensi Monoton bahwa barisan E konvergen ke bilangan real yaitu antara 2 dan 3. Kita mendefinisikan bilangan e sebagai limit dari barisan ini.

Dengan memperbaiki estimasi, dapat ditemukan pendekatan dari bilangan rasional yang lebih dekat ke e, tetapi tidak dapat dievaluasi secara tepat, karena e adalah bilangan irasional. Namun, itu mungkin menghitung e hingga banyak desimal seperti yang diinginkan.

Pembaca harus menggunakan kalkulator (atau komputer) untuk mengevaluasi e_n untuk nilai dari n yang "besar".

D. Latihan 10

1. Misalkan $x_1 := 8$ dan $x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + 2$ untuk $n \in N$. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah limitnya.
2. Misalkan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in N$. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah limitnya.
3. Misalkan $x_1 > 2$ dan $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk $n \in N$. Tunjukkan bahwa (x_n) menurun dan terbatas di bawah oleh 2. Temukan limitnya.
4. Misalkan $x_1 := 1$ dan $x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$ untuk $n \in N$. Tunjukkan bahwa (x_n) konvergen dan temukan limitnya.
5. Misalkan $y_1 := \sqrt{p}$, dimana $p > 0$ dan $y_{n+1} := \sqrt{p + y_n}$ untuk $n \in N$. Tunjukkan bahwa (y_n) konvergen dan temukan limitnya. [Petunjuk: batas atas adalah $1 + 2\sqrt{p}$].
6. Misalkan $a > 0$ dan misalkan $z_1 > 0$. $z_1 := \sqrt{a + x_n}$ untuk $n \in N$. Tunjukkan bahwa (z_n) konvergen dan temukan limitnya.
7. Misalkan $x_1 := a > 0$ dan $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in N$. Tentukan apakah (x_n) konvergen atau divergen.
8. Misalkan (a_n) barisan $increasing$, (b_n) barisan $decreasing$, dan asumsikan $a_n \leq b_n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Tujukkan $\lim(a_n) \leq$

$\lim(b_n)$, dan demikian turunkan sifat nested interval $teorema\ B.6.1$ dari $Teorema\ Konvergensi\ Monoton\ B.10.1$.

9. Misalkan *A* menjadi subset terhingga dari R yang terbatas di atas $u \coloneqq \sup A$. Tunjukkan sebuah barisan $increasing$ (x_n) dengan $x_n \in A$ untuk semua $n \in N$ sedemikian hingga $u = \lim(x_n)$.
10. Tentukan konvergen atau divergen dari barisan (y_n), dimana $y_n \coloneqq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\ untuk\ n \in N$.
11. Misalkan $x_n \coloneqq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ untuk $n \in N$. Buktikan (x_n) adalah $increasing$ dan terbatas, dan konvergen. [Petunjuk: perhatikan jika $k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$.]
12. Tentukan konvergensi dan limit pada barisan berikut.
    (a) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$
    (b) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}\right)$
    (c) $\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}\right)$
    (d) $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)$
13. Gunakan metode dalam $contoh\ C.10.6(1)$ untuk menghitung $\sqrt{2}$, benar dalam 4 desimal.
14. Gunakan metode dalam $contoh\ C.10.6(1)$ untuk menghitung $\sqrt{5}$, benar dalam 5 desimal.
15. Hitung jumlahnya e_n pada $contoh\ C.10.6(2)$ untuk $n = 2,4,8,16$.
16. Hitung e_n untuk $n = 50, n = 100, dan\ n = 1000$.

$\langle \boldsymbol{blank} \rangle$

BAB XI

SUBBARISAN DAN TEOREMA BOLZANO WEIERSTRASS

Pada bab ini akan diberikan konsep subbarisan (*subsequences*) dari suatu barisan bilangan real.

A. Definisi dan Terminologi

Definisi A.11.1: Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dan diberikan barisan bilangan asli $strictly\ increasing$

$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$.

Barisan $X' = (x_{n_k})$ dengan $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ disebut dengan **subbarisan** atau **barisan bagian** ($subsequences$) dari X.

Berikut ini, akan diberikan pengertian puncak "$peak$", yang akan berguna untuk membuktikan eksistensi subbarisan monoton.

Definisi A.11.2: Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. Suku ke-m x_m disebut puncak jika $x_m \geq x_n$ untuk setiap n sedemikian hingga $n \geq m$. (dimana titik x_m tidak pernah didahului oleh sebarang elemen barisan setelahnya).

Catatan: Bahwa pada barisan yang $decreasing$ setiap elemen adalah puncak, tetapi pada barisan yang $increasing$ tidak ada elemen yang menjadi puncak.

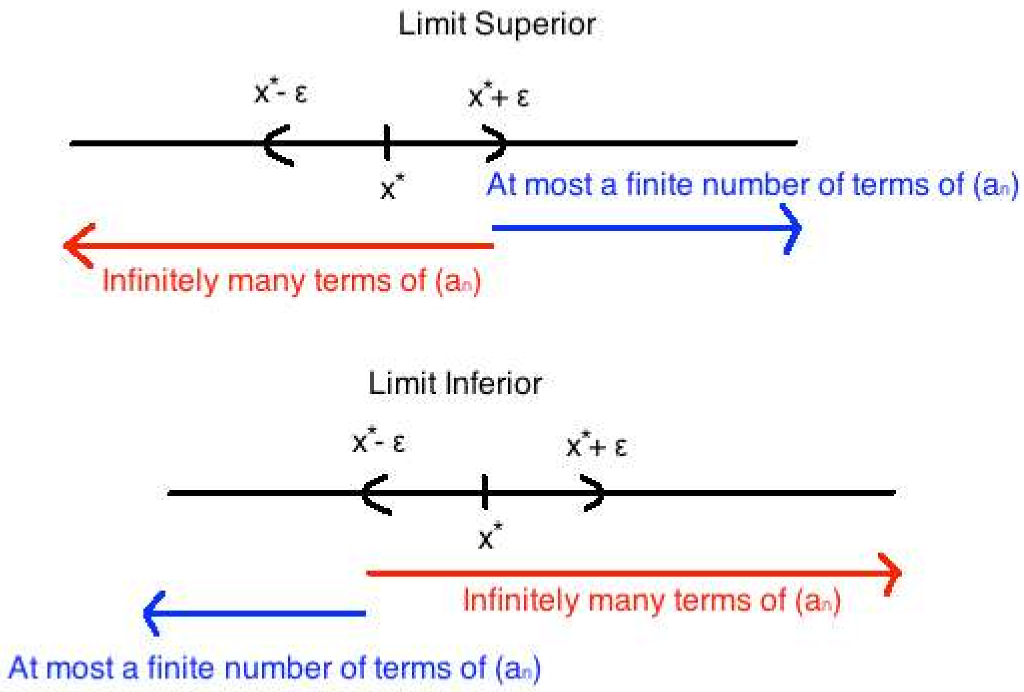
Definisi A.11.3: Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real yang terbatas.

(a) $Limit\ superior\ (x_n)$ adalah $infimum$ dari himpunan V dari $v \in R$ sedemikian hingga $v < x_n$ untuk paling banyak terhingga $n \in N$. Ini dilambangkan dengan

$$\lim sup\ (x_n) \text{ atau } lim\ sup\ X \text{ atau } \overline{lim}\ (x_n)$$

(b) Limit inferior dari (x_n) adalah supremum himpunan $w \epsilon R$ sehingga $x_m < w$ untuk paling banyak terhingga $m \in N$. Ini dilambangkan dengan

$$\lim inf\ (x_n) \text{ atau } lim\ inf\ X \text{ atau } \underline{lim\ (x_n)}$$



Gambar 11.1: Ilustrasi limit superior dan limit inferior

Sumber: http://mathonline.wikidot.com/limit-superior-and-limit-inferior

B. Beberapa Teorema

Teorema B.11.1: Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka sebarang subbarisan $X' = (x_{n_k})$ dari X juga konvergen ke x.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \to x$, maka terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $n_{k+1} \geq n_k$, maka untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$. Sehingga $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

Dengan demikian $X' = (x_{n_k})$ konvergen ke x.

Teorema B.11.2: Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$, maka pernyataan berikut ini ekuivalen.

(i) Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in R$.

(ii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian hingga untuk sebarang $k \in N$, terdapat $n_k \in N$ sedemikian hingga $n_k \geq k$ *dan* $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

(iii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ dan suatu subbarisan $X' = (x_{n_k})$ sedemikian hingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in N$.

Bukti:

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Jika (x_n) tidak konvergen ke x, maka untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ tidak mungkin ditemukan $k \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n_k \geq k$ berlaku $|x_{n_k} - x| < \varepsilon_0$. Akibatnya tidak benar bahwa untuk setiap $k \in N$, $n \geq k$ memenuhi $|x_{n_k} - x| < \varepsilon_0$. Dengan kata lain, untuk setiap $k \in N$, $n_k \in N$, sedemikian hingga $n_k \geq k$ dan $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Diberikan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga memenuhi (ii) dan diberikan $n_1 \in N$ sedemikian hingga $n_1 \geq 1$ dan $|X_{n_1} - x| \geq \varepsilon_0$. Selanjutnya, diberikan $n_2 \in N$ sedemikian hingga $n_2 > n_1$ dan $|X_{n_2} - x| \geq \varepsilon_0$. diberikan $n_3 \in N$ sedemikian hingga $n_3 > n_2$ dan $|X_{n_3} - x| \geq \varepsilon_0$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh suatu subbarisan $X' = (X_{n_k})$ sehingga berlaku $|X_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in N$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Misalkan $X = (X_n)$ mempunyai subbarisan $X' = (X_{n_k})$ yang memenuhi sifat (iii). Maka X tidak konvergen ke x, sebab jika konvergen ke x, maka $X' = (X_{n_k})$ juga konvergen ke x. Hal ini tidak mungkin, sebab $X' = (X_{n_k})$ tidak berada dalam $neighborhood$ $V_{\varepsilon_0}(x)$.

Teorema B.11.3: (Kriteria Divergensi) Jika barisan bilangan real $X = (X_n)$ memenuhi salah satu dari sifat berikut, maka barisan X divergen.

(i) X mempunyai dua subbarisan konvergen $X' = (X_{n_k})$ dan $X'' = (X_{r_k})$ dengan limit keduanya tidak sama.

(ii) X tidak terbatas.

Bukti:

Kasus 1:

Andaikan X tidak tak terbatas. Akan dibuktikan jika X mempunyai dua subbarisan konvergen $X' = (X_{n_k})$ dan $X'' = (X_{r_k})$ dengan limit keduanya tidak sama maka barisan X divergen.

Misalkan: Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka sebarang subbarisan $X' = (x_{n_k})$ dari X juga konvergen ke x. Atau $lim(x_n) = x = lim(x_{n_k})$.

Begitu juga, jika $X = (x_n)$ konvergen ke x, maka sebarang subbarisan $X'' = (x_{n_k})$ dari X juga konvergen ke x. Atau $lim(x_n) = x = lim(x_{r_k})$. Sehingga $lim(x_{n_k})x = lim(x_{r_k})$, kontradiksi dengan hipotesis.

Kasus 2: X mempunyai dua subbarisan konvergen $X' = (X_{n_k})$ dan $X'' = (X_{r_k})$ dengan limit keduanya sama. Akan dibuktikan X tidak terbatas maka barisan X divergen.

Misalkan: X konvergen maka X terbatas ($teorema\ B.9.1$) kontradiksi dengan hipotesis. Jadi haruslah barisan X divergen.

Teorema B.11.4: ($\boldsymbol{Subbarisan\ Monoton}$) $X = (x_n)$ barisan bilangan real, maka terdapat subbarisan dari X yang monoton.

Bukti:

Pembuktian dibagi menjadi dua kasus, yaitu X mempunyai tak hingga banyak puncak, dan X mempunyai berhingga banyak puncak.

Kasus I: X mempunyai tak hingga banyak puncak. Tulis semua puncak dengan indeks $increasing$ yaitu $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}, \dots$. Karena setiap sukunya adalah puncak diperoleh $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{m_k}, \dots$.

Dengan demikian subbarisan dari puncak-puncak (x_{m_k}) merupakan subbarisan yang $decreasing$ dari X.

Kasus II: X mempunyai berhingga banyak puncak. Tulis semua puncak dengan indeks $increasing$, yaitu $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}, \dots$.

Misalkan $s_1 := m_r + 1$ adalah indeks pertama dari puncak yang terakhir. Karena x_{s_1} bukan puncak, maka terdapat $s_2 > s_1$ sedemikian hingga $x_{s_1} < x_{s_2}$. Karena x_{s_2} bukan puncak, maka terdapat $s_3 > s_2$

sedemikian hingga $x_{s_2} < x_{s_3}$. Jika proses ini diteruskan, diperoleh subbarisan (x_{s_k}) yang *increasing* dari X.

Teorema B.11.5: $(\boldsymbol{Bolzano - Weierstrass})$ Setiap barisan bilangan real yang terbatas pasti memuat subbarisan yang konvergen.

Bukti:

Menurut (teorema B. 11.4 *Subbarisan Monoton*) $X = (x_n)$ barisan bilangan real, maka terdapat subbarisan dari X yang monoton.. Karena subbarisan ini juga terbatas, berdasarkan (teorema B. 10.1 *Konvergensi Monoton*), maka subbarisan tersebut konvergen.

Cara lain, Diberikan barisan bilangan real terbatas $X = (x_n)$. Misalkan $S = \{x_n : n \in N\}$ range barisan, maka S mungkin berhingga atau tak berhingga.

Kasus I: Diketahui S berhingga.

Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ maka terdapat $m \in N$ dengan $1 \leq m \leq t$ dan barisan $(r_k : k \in N)$ dengan $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$ sehingga $x_{r_1} = x_{r_2} = \cdots = x_m$. Hal ini berarti terdapat subbarisan $(r_k : k \in N)$ yang konvergen ke x_m.

Kasus II: Diketahui S tak berhingga

Karena S tak berhingga dan terbatas, maka S mempunyai titik *cluster* atau *titik limit* misalkan x titik limit S. Misalkan $U_k = \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$ neighborhood titik x.

Untuk $k = 1$, maka terdapat $x_{r_1} \in S \cap U_1, x_{r_1} \neq x$ sedemikian hingga $\left|x_{r_1} - x\right| < 1$

Untuk $k = 2$, maka terdapat $x_{r_2} \in S \cap U_2, x_{r_2} \neq x$ sedemikian hingga $\left|x_{r_2} - x\right| < \frac{1}{2}$

Untuk $k = 3$, maka terdapat $x_{r_3} \in S \cap U_3, x_3 \neq x$ sedemikian hingga $\left|x_{r_3} - x\right| < \frac{1}{3}$

Demikiann seterusnya, sehingga diperoleh:

Untuk $n = k$ maka terdapat $x_{r_n} \in S \cap U_n, x_n \neq x$ sedemikian hingga $\left|x_{r_n} - x\right| < \frac{1}{n}$

Ambil $\varepsilon > 0$. Menurut Sifat Archimedes, maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku $\left|x_{r_n} - x\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Terbukti bahwa $\left(x_{r_n}\right)$ konvergen ke x dengan $\left(x_{r_n}\right)$ subbarisan (x_n).

Teorema B.11.6: Diberikan $X = (x_n)$ barisan bilangan real terbatas dan $x \in R$ yang mempunyai sifat bahwa setiap subbarisan dari X konvergen ke x. Maka barisan X konvergen ke x.

Bukti:

Misalkan $M > 0$ adalah batas dari barisan X sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$. Andaikan X tidak konvergen ke x, maka menggunakan $Teorema\ B.11.2$ terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan subbarisan $X' = \left(x_{n_k}\right)$ sedemikian hingga

$$\left|x_{n_k} - x\right| \geq \varepsilon_0 \text{ untuk semua } K \in N. \qquad (11.1)$$

Karena X' subbarisan dari X, maka M juga batas dari X'. Menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass berakibat bahwa X' memuat subbarisan X'' . Karena X'' juga subbarisan dari X, maka X'' juga konvergen ke x. Dengan demikian, akan selalu berada dalam $neighborhood\ V_{\varepsilon_0}(X)$. Kontradiksi dengan (11.1), yang benar adalah X selalu konvergen ke x.

Teorema B.11.7: Jika (x_n) adalah barisan bilangan real yang terbatas, maka pernyataan berikut untuk bilangan real x^* adalah setara.

(a) $x^* = lim\ sup(x_n)$

(b) Jika $\varepsilon > 0$, terdapat paling banyak terhingga bilangan $n \epsilon N$ sehingga $x^* + \varepsilon < x_n$, tetapi tak terhingga $n \epsilon N$ yang tak terbatas sedemikian hingga $x^* - \varepsilon < x_n$

(c) Jika $u_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ maka $x^* = inf\{u_m : m\epsilon N\} = lim(u_m)$

(d) Jika S adalah himpunan limit dari subbarisan (x_n), maka $x^* = sup\ S$.

Bukti:

(a) mengimplikasikan (b).

Jika $\varepsilon > 0$, maka fakta bahwa x^* adalah sebuah infimum mengimplikasikan bahwa ada $v\ di\ V$ sedemikian rupa sehingga $x^* \leq v < x^* + \varepsilon$. Karena itu x^* adalah milik V, jadi paling tidak ada sejumlah terhinga $n \epsilon N$ sedemikian sehingga $x^* + \varepsilon < x_n$. Di sisi lain, $x^* - \varepsilon$ tidak dalam V sehingga ada sejumlah tak terhingga $n \epsilon N$ sehingga $x^* - \varepsilon < x_n$.

(b) mengimplikasikan (c).

Jika (b) berlaku, diberikan $\varepsilon > 0$, maka untuk semua m yang cukup besar kita memiliki $u_m < x + \varepsilon$. Oleh karena itu, inf$\{u_m : m\epsilon N\} \leq x^* + \varepsilon$. Demikian juga, karena ada sejumlah tak terhingga $n \epsilon N$ sehingga $x^* - \varepsilon < x_n$, maka $x^* - \varepsilon < u_m$ untuk semua $m \epsilon N$ dan karenanya $x * -\varepsilon \leq \inf\{u_m : m\epsilon N\}$. Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, dimpulkan bahwa $x^* = \inf\{u_m : m\epsilon N\}$. Selain itu, karena barisan (u_m) decreasing monoton, diperoleh $inf(u_m) = lim(u_m)$.

(c) mengimplikasikan (d)

Misalkan $X' = (x_{n_k})$ adalah subbarisan konvergen dari $X = (x_n)$. Karena $n_k \geq k$ kita memiliki $n_{uk} \leq u_k$ dan karenanya $\lim X' \leq \lim(u_k) = x^*$. Sebaliknya, ada n_1 sehingga $u_1 - 1 \leq x_{n_1} \leq u_1$.

Secara induktif pilih $n_{k+1} > n_k$ sehingga

$$n_k - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \leq u_k$$

Sejak lim$(u_k) = x^*$, berarti $x^* = lim(x_n)$ dan disini $x^* \in S$.

(d) mengimplikasikan (a)

Misalkan $w = sup\, S$. Jika $\varepsilon > 0$ diberikan, maka ada paling banyak sejumlah terhingga n dengan $w + \varepsilon < x_n$. Oleh karena itu $w + \varepsilon$ milik V dan $\lim\sup(x_n) \leq w + \varepsilon$. Di lain pihak, ada subbarisan(x_n) yang konvergen ke suatu bilangan yang lebih besar dari $w - \varepsilon$, begitu juga bahwa $w - \varepsilon$ tidak dalam V, dan karenanya $w - \varepsilon \leq \lim sup(x_n)$ Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, disimpulkan bahwa $w = \lim sup(x_n)$.

Teorema B.11.8: Barisan terbatas (x_n) adalah konvergen jika dan hanya jika $lim\ sup(x_n) = lim\ inf(x_n)$.

Bukti sebagai latihan.

C. Contoh-Contoh

Contoh C.11.1: Diberikan $X = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$.

(i) Jika diberikan $n_1 = 2$, $n_2 = 4 \dots n_k = 2k \dots$ maka $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ dengan demikian, barisan $X'_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots\right)$ merupakan subbarisan dari X.

(ii) Jika diberikan $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6 \dots n_k = k + 3 \dots$ maka $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ dengan demikian, Barisan $X'_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right)$ merupakan subbarisan dari X.

(iii) Jika diberikan $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4 \dots n_k = k + 3 \dots$ maka $n_1 \nless n_2$ dengan demikian Barisan $X'_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ bukan merupakan subbarisan dari X.

(iv) Begitu juga $X'_4 = \left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$ bukan merupakan subbarisan dari X.

Contoh C.11.2:

Jika $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ adalah barisan bilangan real, maka $X_m = (X_{m+n} : n \in N) = (X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)$ yaitu $m - ekor$ dari X merupakan subbarisan.

$m - ekor$ bersesuaian dengan barisan yang ditentukan dengan

$$r_1 = m + 1, \quad r_2 = m + 2, \dots, \quad r_n = m + n$$

Sehingga memenuhi $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, Tetapi, tidak setiap subbarisan merupakan ekor barisan. Mengapa?

Contoh C.11.3:

(a). $lim\ (b^n)\ =\ 0\ bila\ \ 0\ <\ b\ <\ 1.$

Pada $Contoh\ C.8.4(b)$, telah dibahas, bahwa bila $0\ <\ b\ <\ 1$ dan bila $x_n\ =\ b^n$, maka dari Ketaksamaan Bernoulli diperoleh bahwa $lim(x_n)\ =\ 0.$

Alternatif lain, dilihat bahwa karena $0\ <\ b\ <\ 1$, maka $x_{n+1}\ =\ b^{n+1}\ <\ b^n\ =\ x_n$; dengan demikian (x_n) adalah barisan $decreasing$. Jelas juga bahwa $0\ \leq x_n\ \leq\ 1$, sehingga menurut Teorema Konvergensi Monoton $teorema\ B.10.1$ barisan tersebut konvergen. Misalkan $x =\ lim\ (x_n)$. Karena (x_{2n}) subbarisan dari (x_n) menurut $Teorema\ B.11.6$ maka $x = lim\ (x_{2n})$. Di lain pihak, karena $x_{2n} = b^{2n} = (b^n)^2 = {x_n}^2$, menurut $Teorema\ B.10.2$ diperoleh,

$$x\ =\ lim\ (x_{2n}) =\ (\ lim\ (x_n))^2 = x^2$$

Oleh karena itu akan dipenuhi salah satu $x\ =\ 0$ atau $x =\ 1.$

Karena (x_n) barisan $decreasing$ dan terbatas di atas oleh 1, maka haruslah $x = 0$

(b). $lim\ (c^{\frac{1}{n}})\ =\ 1\ untuk\ c\ >\ 1.$

Limit ini telah diperoleh dalam $contoh\ C.8.4(c)$ untuk $c\ >\ 0$, dengan pemikiran argumen yang banyak diakal-akali.

Di sini akan dilihat pendekatan lain untuk $kasus\ c\ >\ 1.$

Perhatikan bahwa jika $z_n = c^{\frac{1}{n}},\ maka\ z_n\ >\ 1$ dan $z_{n+1}\ < z_n$untuk semua $n\epsilon N$. Jadi dengan menggunakan Teorema Konvergensi

Monoton, $z = (z_n)$ada. Menurut $teorema\, B.11.1$, berlaku $z = lim\,(z_{2n})$. Di lain pihak, karena

$$z_{2n} = c^{\frac{1}{2n}} = (c^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{2}} = z_n^{\frac{1}{2}}$$

dan $Teorema\, B.9.8$, maka

$$z = \lim(z_{2n}) = (lim(z_{2n}))^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}}$$

Karena itu $z^2 = z$ yang menghasilkan $z = 0$ atau $z = 1$. Karena $z_n > 1$ untuk semua $n \epsilon N$, maka haruslah $z = 1$.

Untuk kasus $0 < c < 1$, bukti sebagai latihan.

Kegunaan subbarisan membuat lebih mudah untuk menyajikan uji divergensi suatu barisan.

Contoh C.11.4:

(a) *Barisan* $((-1)^n)$ *divergen*

Bila barisan $X = ((-1)^n)$ konvergen ke x, maka (menurut $Teorema\, B.11.1$) setiap sub-barisan dari X harus konvergen ke x. Karena terdapat subbarisan yang konvergen ke $+1$ dan sub-barisan yang lain konvergen ke -1, maka haruslah X divergen.

(b) *Barisan* $\left(1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\frac{1}{6},\dots\right)$ *divergen*

Didefinisikan barisan $Y = (y_n)$, yang mana $y_n = n$ bila n ganjil dan $y_n = \frac{1}{n}$ bila n genap secara mudah dapat dilihat bahwa barisan ini tidak terbatas, disini menurut $teorema\, B.9.1$, barisan ini tidak mungkin konvergen. Secara alternatif, walaupun sub-barisan($\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6}$,....) dari Y konvergen ke 0, keseluruhan barisan Y tidak konvergen ke 0. Yaitu, terdapat subbarisan $(3,5,7,\ldots)$ dari Y yang berada di luar $1 - neighboorhod$ dari 0; karena itu Y tidak konvergen ke 0.

(c) Barisan $S := (\sin n)$ divergen.

Barisan ini tidak begitu mudah untuk ditangani. Dalam membahasnya, tentu saja, memanfaatkan sifat-sifat dasar dari fungsi sinus. Diketahui bahwa $Sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ dan bahwa $sin\, x > \frac{1}{2}$ untuk pada interval $I_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. Karena panjang dari $I_1 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$ paling sedikit terdapat dua bilangan asli di dalam I_1. Kita misalkan n_1 sebagai bilangan pertama. Dengan cara yang sama, untuk setiap $k \in N, sin\, x > 1/2$ untuk x pada interval:

$$I_k = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi(k-1), \frac{5\pi}{6} + 2\pi(k-1)\right)$$

Karena panjang I_k lebih dari 2, paling sedikit terdapat dua bilangan asli di dalam I_k: kita mengambil n_k sebagai bilangan asli yang pertama. subbarisan $S' = (\sin n_k)$ dari S dengan cara ini diperoleh semua nilai terletak pada interval $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Dengan cara yang sama, jika $k \in N$ dan J_k adalah interval

$$J_k = \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi(k-1), \frac{11\pi}{6} + 2\pi(k-l)\right),$$

Kemudian kita melihat bahwa $\sin x < -\frac{1}{2}$ untuk setiap $x \epsilon J_k$ dan panjang J_k lebih dari 2. Misalkan m_k adalah bilangan asli pertama di J_k. maka subbarisan $S'' = (\sin m_k)$ dari S yang semua nilainya terletak pada interval $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Diberikan sebarang bilangan real c pada dilihat paling sedikit satu subbarisan S' dan S'' terletak diluar $\frac{1}{2} - neighborhood$ dari c. Oleh karena itu, c bukanlah limit dari S. Karena $c \in \boldsymbol{R}$ sebarang, maka kita dapat menyimpulkan bahwa S adalah divergen.

Contoh $C.11.5$:

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan bahwa barisan bilangan real $X = (X_n)$ pasti mempunyai subbarisan yang monoton. Untuk membuktikan teorema ini, diberikan pengertian puncak *(peak)*, x_m disebut puncak jika $x_m \geq x_n$ untuk semua *n* sedemikian hingga $n \geq m$. Titik x_m tidak pernah didahului oleh sebarang elemen barisan setelahnya. Perhatikan bahwa pada barisan yang menurun, setiap elemen adalah puncak, tetapi pada barisan yang naik, tidak ada elemen yang menjadi puncak.

D. Latihan 11

1. Berikan contoh barisan tak terbatas yang mempunyai subbarisan konvergen.
2. Gunakan metode pada $contoh\ C.11.3\ (b)$ untuk menunjukkan bahwa $0 < c < 1$, maka $\left(c^{\frac{1}{n}}\right) = 1.$
3. Misalkan (f_n) adalah barisan Fibonacci pada Contoh $C.8.1.(e)$, dan misalkan $x_n := f_{n+1}/f_n$. Mengingat bahwa $\lim(x_n) = L$ ada, tentukan nilai L.
4. Tunjukkan bahwa barisan berikut ini divergen.

(a) $\left(1-(-1)^n+\frac{1}{n}\right)$. (b) $\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

5. Misalkan $X=(x_n)$ dan $Y=(y_n)$ dan barisan $Z=(z_n)$ didefinisikan dengan $z_1=x_1, z_2=y_1, \dots z_{2n-1}=x_n, z_{2n}=y_n, \dots$ Tunjukkan bahwa Z konvergen jika dan hanya jika X dan Y konvergen dan $lim\, X = lim\, Y$

6. Misalkan $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ untuk $n \in N$

   (a) Tunjukkan bahwa $x_{n+1} < x_n$ ekivalen dengan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$, dan diduga bahwa ketaksamaan ini benar untuk $n \geq 3$. [lihat $contoh$ $10.6(1)$] Buktikan bahwa (x_n) pada akhirnya $decreasing$ dan $x = lim(x_n)$ ada.

   (b) Gunakan fakta subbarisan (x_{2n}) juga konvergen ke x untuk menyimpulkan bahwa $x = 1$

7. Tentukan konvergensi dan limit barisan berikut.

   (a) $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)$. (b) $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}\right)$.

8. Hitunglah limit barisan berikut.

   (a) $\left((3n)^{\frac{1}{2n}}\right)$. (b) $\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}\right)$.

9. Misalkan setiap subbarisan dari $X=(x_n)$ mempunyai suatu sub-barisan yang konnvergen ke 0. Tunjukkan bahwa $lim(x_n)=0$.

10. Diberikan barisan terbatas (x_n) dan untuk setiap $n \in N$ misalkan $s_n := sup\,\{x_k : k \geq n\}$ dan $S := inf\,\{s_n\}$. Tunjukkan bahwa terdapat subbarisan dari (x_n) yang $konvergen$ ke S.

11. Jika $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$ dan $lim((-1)^n x_n)$ ada, tunjukkan (x_n) konvergen.
12. Tunjukkan bahwa jika (x_n) terbatas, maka terdapat subbarisan (x_{n_k}) sedemikian hingga $lim\left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = 0$.
13. Bila $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ carilah subbarisan dari (x_n) yang dikonstruksikan dalam bukti kedua dari $teorema\ Bolzano - Weierstrass\ B.11.5$, ketika kita mengambil $I_1 := [-1,1]$
14. Misalkan (x_n) barisan terbatas dan $s = sup\{x_n : n\epsilon N\}$. Tunjukkan bahwa bila $s \notin \{x_n : n\epsilon N\}$, maka terdapat subbarisan dari (x_n) yang konvergen ke s.
15. Misalkan (I_n) adalah barisan tersarang dari interval tutup terbatas. Untuk setiap $n \in N$, misalkan $x_n \in I_n$. Menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass untuk memberikan bukti Properti Interval Bersarang B.6.2.
16. Berikan contoh bahwa Teorema B.11.6 gagal bila hipotesis X barisan terbatas dihilangkan.
17. Alternatif suku-suku barisan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dan $\left(-\frac{1}{n}\right)$ untuk mendapatkan barisan (x_n) yang diberikan oleh $\left(2, -1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \dots.\right)$
Tentukan nilai-nilai $lim\,sup(x_n)$ dan $lim\,inf\,(x_n)$. Juga temukan $\sup\{x_n\}$ dan $\inf\{x_n\}$

BAB XII

BARISAN CAUCHY

Teorema Konvergensi Monoton adalah sesuatu yang sangat berguna dan penting, tetapi memiliki kelemahan taraf signifikan yakni hanya berlaku untuk barisan yang monoton. Penting bagi kita untuk mengetahui ke konvergenan dari suatu barisan tanpa harus mengetahui lebih dahulu nilai limitnya, dan ketakterbatasan pada barisan monoton. Kriteria Cauchy, yang akan didiskusikan dalam bagian ini, yang akan menjawab kondisi seperti itu.

A. Definisi dan Terminologi

Definisi A.12.1: Suatu barisan $X = (x_n)$ dari bilangan real dikatakan sebagai **Barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sehingga untuk semua bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$, dengan syarat suku-suku x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Pentingnya konsep barisan Cauchy terletak pada teorema utama dari bagian ini, yang menegaskan bahwa barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan itu adalah barisan Cauchy. Ini akan memberi kita suatu metode untuk membuktikan suatu barisan konvergen (konvergen) tanpa mengetahui limit barisannya terlebih dulu.

Definisi A.12.2: Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan $\boldsymbol{kontraktif}$ jika terdapat konstanta C, $0 < C < 1$, sedemikian hingga

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

untuk semua $n \in N$. Bilangan C disebut **konstanta** dari barisan kontraktif.

B. Beberapa Teorema

Lemma B.12.1: Jika $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen, maka X adalah barisan $Cauchy$.

Bukti:

Jika $x = lim\, X$, maka diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon/2)$ sehingga jika $n \geq K(\varepsilon/2)$ maka $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Jadi, jika $H(\varepsilon) \coloneqq K(\varepsilon/2)$ dan jika $n, m \geq H(\varepsilon)$, maka diperoleh

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$
$$\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka berarti bahwa (x_n) adalah barisan $Cauchy$.

Untuk menentukan bahwa barisan $Cauchy$ adalah konvergen, kita akan membutuhkan hasil sebagai berikut.

Lemma B.12.2: Barisan bilangan real $Cauchy$ adalah terbatas.

Bukti:

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan $Cauchy$ dan Misalkan $\varepsilon \coloneqq 1$.

Jika $H := H(1)$ dan $n \geq H$, maka $|x_n - x_H| < 1$.

Berdasarkan Ketidaksamaan Segitiga, diperoleh $|x_n| \leq |x_H| + 1$ untuk semua $n \geq H$. Jika ditetapkan

$$M \coloneqq \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\}$$

maka $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$. Jadi $X = (x_n)$ terbatas.

Teorema B.12.3: $(\boldsymbol{Kriteria\ Konvergensi\ Cauchy})$ Suatu barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut adalah barisan $Cauchy$.

Bukti:

Kita telah melihat, dalam $Lemma\ B.12.1$, bahwa barisan konvergen adalah barisan $Cauchy$.

Sebaliknya, misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan $Cauchy$; kita akan menunjukkan bahwa X adalah konvergen ke suatu bilangan real. Menurut $Lemma\ B.12.2$ bahwa barisan X terbatas. Oleh karena itu, menurut $Teorema\ Bolzano - Weierstrass\ B.11.5$, ada subbarisan $X' = \left(x_{n_k}\right)$ dari X yang konvergen ke suatu bilangan real x^*. Buktinya akan dilengkapi dengan menunjukkan bahwa X konvergen ke x^*.

Karena $X = (x_n)$ adalah barisan $Cauchy$, diberikan $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli $H\ (\varepsilon/2)$ sedemikia hingga jika $n, m \geq H\ (\varepsilon/2)$ maka

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2. \qquad (12.1)$$

Karena subbarisan $X' = \left(x_{n_k}\right)$ konvergen ke x^*, ada bilangan asli $K \geq H\ (\varepsilon/2)$ milik himpunan $\{n_1, n_2, \dots\}$ sedemikian hingga

$$|x_K - x^*| < \varepsilon/2$$

Karena $K \geq H\ (\varepsilon/2)$, maka dari (12.1) dengan $m = K$ itu

$$|x_n - x_K| < \varepsilon/2 \text{ untuk } n \geq H\ (\varepsilon/2)$$

Karena itu, jika $n \geq H\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, maka dapat ditulis

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_K| + |x_K - x^*| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, dapat disimpulkan bahwa $lim(x_n) = x^*$. Dengan demikian barisan X adalah konvergen.

Teorema B.12.4: Setiap barisan $kontraktif$ itu merupakan barisan $Cauchy$, dengan demikian barisan tersebut konvergen.

Bukti. Jika kita berhasil menerapkan kondisi suatu definisi untuk barisan kontraktif, kita dapat kembali ke awal barisan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n| \leq C^2|x_n - x_{n-1}| \leq C^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ \leq \cdots \leq C^n|x_2 - x_1|.\end{aligned}$$

Untuk $m > n$, kami memperkirakan $|x_m - x_n|$ dengan menerapkan Ketidaksamaan Segitiga terlebih dahulu dan kemudian menggunakan rumus untuk penjumlahan deret geometri. Ini diperoleh,

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (C^{m-2} + C^{m-3} + \cdots + C^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &= C^{n-1}\left(\frac{1 - C^{m-n}}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \\ &\leq C^{n-1}\left(\frac{1}{1 - C}\right)|x_2 - x_1|\end{aligned}$$

untuk $0 < C < 1$, diketahui $\lim(C^n) = 0$ [lihat $C.8.2(e)$]. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa (x_n) adalah barisan $Cauchy$. Sekarang menurut $kriteria\ kekonvergenan\ Cauchy\ B.12.3$ bahwa (x_n) adalah barisan konvergen.

Teorema Akibat B.12.5: Jika $X \coloneqq (x_n)$ adalah barisan kontraktif dengan C konstan; $0 < C < 1$, dan jika $x^* \coloneqq \lim X$, maka

(i) $|x^* - x_n| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|$,

(ii) $|x^* - x_n| \leq \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$.

Bukti:

Dari bukti sebelumnya, jika $m > n$, maka $|x_m - x_n| \leq \left(\frac{C^{n-1}}{(1-C)}\right)|x_2 - x_1|$.

Jika dimisalkan $m \to \infty$ dalam ketidaksamaan ini, diperoleh (i) yaitu:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|$$

Untuk membuktikan (ii), ingat bahwa jika $m > n$, maka

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|.$$

Karena sudah mapan, menggunakan Induksi, bahwa

$$|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq C^k|x_n - x_{n-1}|,$$

Dapat disimpulkan,

$$|x_m - x_n| \leq (C^{m-n} + \cdots + C^2 + C)|x_n - x_{n-1}|$$
$$\leq \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$$

sekarang jika dimisalkan $m \to \infty$ maka ketidaksamaan ini akan menjadi (ii) yaitu:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$$

C. Contoh-Contoh

Contoh C.12.1:

(a) Barisan $(1/n)$ adalah barisan $Cauchy$.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, selanjutnya dipilih sebuah bilangan asli $H = H(\varepsilon)$ sedemikian rupa sehingga $H > \varepsilon/2$. Kemudian jika $m, n \geq H$, maka $1/n \leq 1/H < \varepsilon/2$, demikian juga $1/m < \varepsilon/2$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jika $m, n \geq H$, maka

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, dapat disimpulkan bahwa $(1/n)$ adalah barisan $Cauchy$.

(b) Barisan $(1 + (-1)^n)$ bukan barisan $Cauchy$

Negasi dari definisi barisan $Cauchy$ adalah: terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap H ada paling sedikit satu $n > H$ dan ada paling sedikit satu $m > H$ sedemikian hingga $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$. Untuk suku-suku $x_n := 1 + (-1)^n$. Perhatikan bahwa jika n genap, maka $x_n = 2$ dan $x_{n+1} = 0$. Jika diambil $\varepsilon_0 = 2$, maka untuk setiap H kita dapat memilih bilangan genap $n > H$ dan misalkan $m = n + 1$ untuk mendapatkan

$$|x_n - x_{n+1}| = 2 = \varepsilon_0$$

Dapat disimpulkan bahwa (x_n) bukan barisan $Cauchy$.

Catatan: Disini ditekankan bahwa untuk membuktikan barisan (x_n) adalah barisan $Cauchy$, tidak dapat mengasumsikan hubungan antara m dan n, karena ketidaksamaan yang diperlukan $|x_n - x_m| < \varepsilon$ harus berlaku untuk *semua* $n, m \geq H(\varepsilon)$. Tetapi untuk membuktikan suatu barisan bukanlah barisan $Cauchy$, dapat ditentukan hubungan antara

n dan m selama nilai-nilai n dan m yang besar dapat dipilih sehingga $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$. Tujuannya adalah untuk menunjukkan dengan tepat bahwa barisan $Cauchy$ adalah barisan konvergen. Pertama kali membuktikan bahwa barisan konvergen adalah barisan $Cauchy$.

Contoh C.12.2:

(a) Misalkan $X = (x_n)$ didefinisikan oleh

$x_1 := 1, x_2 = 2$, dan $x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ untuk $n > 2$.

Hal ini dapat ditunjukkan oleh Induksi yang $1 \leq x_n \leq 2$ untuk semua $n \in N$. Beberapa perhitungan menunjukkan bahwa barisan X tidak monoton. Namun, karena suku-suku itu dibentuk oleh rata-rata dua suku sebelumnya, itu mudah dilihat

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}} \; untuk \; n \in N$$

(Buktikan ini dengan Induksi)

Jadi, jika $m > n$, kita dapat menggunakan $ketidaksamaan\ segitiga$ untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} + x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} + x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

Jika, diberikan $\varepsilon > 0$, dan n dipilih besar sedemikian sehingga $1/2^n < \varepsilon/4$ dan jika $m \geq n$, maka $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Oleh karena itu, X adalah barisan $Cauchy$ di R. Dengan $kriteria\ kekonvergenan\ Cauchy\ B.12.3$ dapat disimpulkan bahwa barisan X konvergen ke x.

Untuk mengevaluasi limitnya adalah x, pertama kali diuji dengan memasukkan ke relasi $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ untuk menyimpulkan bahwa x harus memenuhi relasi $x = \frac{1}{2}(x + x)$, dengan benar, tetapi metode ini tidak informatif. Maka kita harus mencoba metode yang lain.

Karena X konvergen ke x, begitu pula subbarisan X' dengan indeks ganjil. Dengan Induksi, dapat diperlihatkan bahwa

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} \\ &= 1 + \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa $x = \lim X = \lim X' = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

(b) Misalkan $Y = (y_n)$ barisan bilangan real yang diberikan oleh,

$$y_1 := \frac{1}{1!}, y_2 := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}, \dots, y_n := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \dots$$

Jelas, Y bukan barisan monoton.

Namun, jika $m > n$, maka

$$y_m - y_n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}$$

Karena $2^{r-1} \le r!$ (lihat [13]), artinya jika $m > n$, maka

$$|y_m - y_n| \le \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Oleh karena itu, mengingat bahwa (y_n) adalah barisan $Cauchy$. Barisan tersebut konvergen dengan limit y. Pada saat ini y tidak dapat dievaluasi secara langsung; Namun, melalui limit (sehubungan dengan m) dalam ketidaksamaan di atas, didapatkan

$$|y_n - y| \leq \ 1/2^{\mathrm{n}-1}$$

Sekarang dapat menghitung y dengan ketepatan yang diinginkan, dengan menghitung suku y_n untuk n cukup besar. Pembaca harus melakukan ini dan menunjukkan bahwa y kira-kira sama dengan $0.632\ 120\ 559$. (Nilai eksak dari y adalah $1 - 1/e$.)

(c) Barisan selanjutnya $\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ *divergen.*

Misalkan $H: = (h_n)$ menjadi barisan yang ditentukan oleh

$$h_n: = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ untuk } n \in N$$

yang mana dalam $Contoh\ 10.2(b)$. Jika $m > \ n$, maka

$$h_m - h_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m}$$

Karena setiap suku-suku $m - n$ ini melebihi $1/m$, maka

$$h_m - h_n > \frac{(m-n)}{m} = 1 - \frac{n}{m}.$$

Khususnya, jika $m = \ 2n$ kita memiliki $h_{2n} - h_n > \frac{1}{2}$. Ini menunjukkan bahwa H bukan barisan $Cauchy$; oleh karena itu H bukan merupakan deret konvergen. (kasus semacam ini akan diperkenalkan di bab xiv, baru saja dibuktikan bahwa "*deret harmonik*" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.)

Contoh $C.12.3$:

Barisan pecahan $x_n := f_n/f_{n+1}$ di mana $f_1 = f_2 = 1$ dan $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. (f_n barisan Fibonacci Lihat $Contoh\ C.8.1(e)$)

Beberapa suku pertama barisan tersebut adalah

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{2}{3},\ x_4 = \frac{3}{5},\ x_5 = \frac{5}{8}$, dan seterusnya.

Barisan (x_n) tersebut dapat dituliskan secara induktif (menggunakan relasi rekursif) oleh persamaan $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ sebagai berikut:

$$x_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+1} + f_n} = \frac{1}{1 + \frac{f_n}{f_{n+1}}} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

Dengan menggunakan argumen induksi dapat ditentukan $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ untuk semua n, sehingga dengan menambahkan 1 dan mengambil kebalikannya diperoleh ketidaksamaan $1/2 \leq 1/(1 + x_n) \leq 2/3$ untuk semua n. Kemudian dengan mengikuti berikut

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} \leq \frac{2}{3}.\frac{2}{3}|x_n - x_{n-1}| = \frac{4}{9}|x_n - x_{n-1}|.$$

Oleh karena itu, barisan (x_n) adalah $kontraktif$ dan akibatnya konvergen dengan $Teorema\ B.12.3$ melalui limit $x = \lim(x_n)$, diperoleh persamaan $x = \frac{1}{1+x}$, sehingga x memenuhi persamaan $x^2 + x - 1 = 0$. Menggunakan rumus penyelesaian persamaan kuadrat memberi kita solusi positif

$$x = \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2} = 0{,}618034 \ldots$$

Kebalikannya $1/x = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1{,}618034\ldots$ sering dilambangkan dengan huruf Yunani φ dan disebut sebagai $Rasio\ Emas$ dalam sejarah geometri. Dalam teori artistik kuno para filsuf Yunani, sebuah persegi panjang yang memiliki rasio sisi yang lebih panjang ke sisi yang lebih pendek sebagai $Rasio\ Emas$ maka persegi panjang tersebut paling enak dipandang mata. Banyak juga yang memiliki sifat matematika yang menarik. (Sebuah diskusi historis tentang $Rasio\ Emas$ dapat ditemukan di Wikipedia.)

Contoh C.12.4: Diketahui bahwa persamaan kubik $x^3 - 7x + 2 = 0$ memiliki solusi antara $0\ dan\ 1$ dan ingin dihasikan solusi yang mendekati solusi persamaan ini. Masalah ini bisa diselesaikan dengan sarana prosedur iterasi sebagai berikut.
Pertama-tama ditulis ulang persamaan sebagai $x = (x^3 + 2)/7$ dan gunakan ini untuk menentukan barisan. Kami menetapkan untuk x_1 sebarang nilai antara 0 dan 1, dan kemudian didefinisikan

$$x_{n+1} := \tfrac{1}{7}(x_n^3 + 2) \text{ untuk } n \in N.$$

Karena $0 < x_1 < 1$, berarti $0 < x_n < 1$ untuk semua $n \in N$. (Mengapa?) Selain itu, diketahui

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{1}{7}(x_{n+1}^3 + 2) - \frac{1}{7}(x_n^3 + 2)\right| = \frac{1}{7}|(x_{n+1}^3 - x_n^3)| \\ &= \frac{1}{7}|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2||x_{n+1} - x_n| \le \frac{3}{7}|x_{n+1} - x_n|. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, (x_n) adalah barisan kontraktif dan karenanya ada r sedemikian hingga $\lim(x_n) = r$.

Jika dimasukkan limit kedua sisi kesamaan $x_{n+1} = (x_n^3 + 2)/7$, diperoleh $r = (r^3 + 2)/7$ dan karenanya $r^3 - 7r + 2 = 0$. Jadi r adalah solusi dari persamaan.

Nilai *r* dapat diperkirakan dengan memilih x_1, dan menghitung $x_2, x_3,$ ... berturut-turut. Sebagai contoh, jika diambil $x_1 = 0{,}5$, diperoleh (ke sembilan tempat desimal):

$x_2 = 0{,}303571429,$ $\quad$ $x_3 = 0{,}289710830$

$x_4 = 0{,}289188016,$ $\quad$ $x_5 = 0{,}289169244$

$x_6 = 0{,}289168571,$ $\quad$ etc.

Untuk memperkirakan akurasi, kami mencatat bahwa $|x_2 - x_1| < 0.2$. Dengan demikian, setelah n langkah-langkahnya mengikuti $teorema\ Akibat\ B.12.5\ (ii)$ meyakinkan bahwa $|x^* - x_n| \leq 3^{n-1}(7^{n-2} \cdot 20)$.

Jadi, ketika $n = 6$, diperoleh hasil

$$|x^* - x_6| \leq 3^5(7^4 \cdot 20) = 243/48\,020 < 0{,}0051.$$

Sebenarnya pendekatan secara substansial lebih baik dari ini. Bahkan, kenyataanya $|x_6 - x_5| < 0{,}0000005$, itu menurut $teorema\ Akibat\ B.12.5\ (ii)$ bahwa

$$|x^* - x_6| \leq \frac{3}{4}|x_6 - x_5| < 0{,}0000004.$$

Oleh karena itu lima tempat desimal pertama dari x_6 sudah benar.

D. Latihan 12

1. Berikan contoh barisan terbatas yang bukan barisan Cauchy.
2. Tunjukkan secara langsung dari definisi bahwa berikut ini adalah barisan Cauchy.

   (a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, (b) $\left(1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$
3. Tunjukkan langsung dari definisi bahwa berikut ini bukan barisan Cauchy.

   (a) $((-1)^n)$, (b) $\left(n+\frac{(-1)^n}{n}\right)$, (c) $(\ln n)$
4. Tunjukkan langsung dari definisi bahwa jika (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka (x_n+y_n) dan $(x_n y_n)$ adalah barisan Cauchy.
5. Jika $x_n := \sqrt{n}$, tunjukkan bahwa (x_n) memenuhi $\lim|x_{n+1}-x_n| = 0$, tetapi itu bukan merupakan barisan Cauchy.
6. Misalkan p adalah bilangan asli yang diketahui. Berikan contoh barisan (x_n) yang bukan barisan Cauchy, tetapi memenuhi $\lim|x_{n+p}-x_n| = 0$
7. Misalkan (x_n) menjadi barisan Cauchy sehingga x_n adalah bilangan bulat untuk setiap $n \in N$. Tunjukkan bahwa (x_n) pada akhirnya konstan.
8. Tunjukkan secara langsung bahwa, barisan terbatas, monoton $increasing$ adalah barisan Cauchy.
9. Jika $0 < r < 1$ dan $|x_{n+1}-x_n| < r^n$ untuk semua $n \in N$, tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

10. Jika $x_1 < x_2$ adalah sebarang bilangan real dan $x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ untuk $n > 2$, tunjukkan bahwa (x_n) adalah konvergen. Berapa batasnya?

11. Jika $y_1 < y_2$ adalah sebarang bilangan real dan $y_n := \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}$ untuk $n > 2$, tunjukkan bahwa (y_n) adalah konvergen. Berapa limitnya?

12. Jika $x_1 > 0$ dan $x_{n+1} := (2 + x_n)^{-1}$ untuk $n \geq 1$, tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan kontraktif. Temukan limitnya.

13. Jika $x_1 := 2$ dan $x_{n+1} := 2 + \frac{1}{x_n}$ untuk $n \geq 1$, tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan kontraktif. Apakah barisan tersebut memiliki limit?

14. Persamaan polinomial $x^3 - 5x + 1 = 0$ memiliki akar r dengan $0 < r < 1$. Gunakan barisan kontraktif yang tepat untuk menghitung r dalam 10^{-4}.

BAB XIII

BARISAN DIVERGEN SEJATI

Pada bab ini diberikan beberapa sifat dari suatu barisan bilangan real (x_n) yang mendekati atau menuju ke $\pm\infty$ yaitu $\lim(x_n) = +\infty$ dan $\lim(x_n) = -\infty$. Ingat bahwa barisan $divergen$ adalah barisan yang tidak $konvergen$.

A. Definisi dan Terminologi

Definisi A.13.1: 3.6.1. Diberikan barisan bilangan real (x_n) .

(i) Barisan (x_n) dikatakan **mendekati** $+\infty$, ditulis $\lim(x_n) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \epsilon R$ terdapat $K(\alpha) \in N$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\alpha)$, maka $x_n > \alpha$.

(ii) Barisan (x_n) dikatakan **mendekati** $-\infty$, ditulis $\lim(x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\beta \epsilon R$ terdapat $K(\beta) \in N$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\beta)$, maka $x_n < \beta$.

Barisan (x_n) dikatakan $divergen\ sejati$ jika $\lim(x_n) = +\infty$ atau $\lim(x_n) = -\infty$.

B . Beberapa Teorema

Barisan monoton sangat sederhana dalam hal konvergensi mereka. Kita telah melihat dalam $teorema\ konvergensi\ monoton\ B.10.1$ bahwa barisan monoton adalah konvergen jika dan hanya jika terbatas.

Teorema B.13.1: Barisan bilangan real monoton merupakan barisan divergen sejati jika dan hanya jika barisannya tidak terbatas.

(i) Jika (x_n) barisan *increasing* tak terbatas, maka $\lim(x_n) = +\infty$.

(ii) Jika (x_n) barisan *decreasing* tak terbatas $\lim(x_n) = -\infty$

Bukti:

(i) Misalkan (x_n) barisan *increasing*. Jika (x_n) terbatas, maka (x_n) konvergen. Jika (x_n) tidak terbatas, maka untuk sebarang $\alpha \in R$ terdapat $n(\alpha) \in N$ sedemikian hingga $\alpha < x_{n(\alpha)}$. Tetapi karena (x_n) *increasing* diperoleh $\alpha < x_n$ untuk semua $n \geq n(\alpha)$. Karena α sebarang, maka diperoleh bahwa $\lim(x_n) = +\infty$.

(ii) Bukti hampir sama dengan (a).

Teorema B.13.2: Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) dengan $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in N$.

(i) Jika $lim(x_n) = +\infty$, maka $lim(y_n) = +\infty$.

(ii) Jika $lim(y_n) = -\infty$, maka $lim(x_n) = -\infty$

Bukti:

(i) Jika $\lim(x_n) = +\infty$ dan jika diberikan $\alpha \in R$ maka terdapat $K(\alpha) \in N$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\alpha)$, maka $\alpha < x_n$. Karena diketahui $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in N$, maka $\alpha < y_n$ untuk semua $n \geq K(\alpha)$.. Karena α sebarang, maka $\lim(y_n) = +\infty$.

(ii) Bukti hampir sama dengan (a).

Teorema B.13.3: Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah barisan bilangan real positif dan untuk suatu $L \in R, L > 0$ diketahui

$$lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L \ .$$

Maka $lim(x_n) = +\infty$ jika dan hanya jika $lim(y_n) = +\infty$.

Bukti:

Diketahui $lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L$ artinya terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L \ .$$

Oleh karena itu diperoleh $\left(\frac{1}{2}L\right) y_n < x_n < \left(\frac{3}{2}L\right) y_n$ untuk semua $n \geq K$. Sehingga menggunakan $teorema\ B.13.2$, teorema terbukti.

C . Contoh-Contoh

Contoh C.13.1:

(a) $\lim(n) = +\infty$.

Faktanya, jika $\alpha \in R$ diberikan, maka terdapat bilangan asli $K\ (\alpha)$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\alpha)$, maka $x_n > \alpha$ atau $n > \alpha$

(b) $\lim(n^2) = +\infty$.

Jika $K\ (\alpha)$ adalah bilangan asli seperti $K\ (\alpha) > \alpha$, dan jika $n \geq K(\alpha)$ maka kita memiliki $n^2 \geq n > \alpha$.

(c) Jika $c > 1$, maka $\lim(c^n) = +\infty$.

Misalkan $= 1 + b$, dimana $b > 0$. Jika $\alpha \in R$, misalkan $K\ (\alpha)$ menjadi bilangan asli sehingga $K\ (\alpha) > \frac{\alpha}{b}$. Jika $n \geq K(\alpha)$ itu mengikuti dari Ketidaksamaan Bernoulli sebagai berikut

$$c^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb > 1 + \alpha > \alpha.$$

Oleh karena itu $\lim(c^n) = +\infty$.

D. Latihan 13

1. Tunjukkan bahwa jika (x_n) barisan tak terbatas, maka (x_n) memuat subbarisan yang *divergen sejati*.
2. Berikan contoh pada barisan yang divergen (x_n) dan (y_n) dengan $(y_n) \neq 0$ untuk semua $n \in N$ sehingga:
   (a) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ konvergen,
   (b) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ divergen
3. Tunjukkan bahwa jika $x_n > 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $lim(x_n) = 0.$ jika dan hanya jika $lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty.$
4. Tentukan apakah barisan berikut ini *divergen sejati*.
   (a) $(\sqrt{n})$ (b) $(\sqrt{n+1})$
   (c) $(\sqrt{n-1})$ (c) $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$
5. Apakah barisan $(n \sin n)$ *divergen sejati*?

6. Diberikan (x_n) barisan divergen sejati dan diberikan (y_n) sedemikian hingga $\lim(x_n y_n) \in R$. Tunjukkan bahwa (y_n) konvergen ke 0.
7. Biarkan (x_n) dan (y_n) barisan bilangan positif sedemikian hingga $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$.
   (a) Tunjukkan bahwa jika $lim(x_n) = +\infty$, maka $lim(y_n) = +\infty$,
   (b) Tunjukkan bahwa jika (y_n) terbatas, maka $lim(x_n) = 0$.
8. Selidiki apakah barisan berikut ini konvergen atau divergen.
   (a) $\left(\sqrt{n^2+2}\right)$ $\qquad$ (c) $\left(\frac{\sqrt{n}}{(n^2+1)}\right)$
   (b) $\left(\frac{(\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n}}\right)$ $\qquad$ (d) $\left(\sin\sqrt{n}\right)$
9. Biarkan (x_n) dan (y_n) menjadi barisan bilangan positif seperti $lim(\frac{x_n}{y_n}) = +\infty$,
   (a) Tunjukkan bahwa jika $lim(y_n) = +\infty$, maka $lim(x_n) = +\infty$
   (b) Tunjukkan bahwa jika (x_n) terbatas, maka $lim(y_n) = 0$
10. Tunjukkan bahwa jika $lim\left(\frac{a_n}{n}\right) = L$, di mana $L > 0$, maka $lim(a_n) = +\infty$.

$\langle \boldsymbol{blank} \rangle$

BAB XIV

DERET TAKHINGGA

Berikut ini diberikan pengenalan sekelumit tentang konsep deret tak berhingga dari bilangan real.

A. Definisi dan Terminologi

Definisi A.14.1: Jika $X := (x_n)$ barisan di R, maka deret tak berhingga (cukup disebut deret) yang dibentuk oleh X adalah barisan $S := (s_k)$ yang didefinisikan dengan

$s_1 \coloneqq x_1$

$s_2 \coloneqq s_1 + x_2 \qquad (= x_1 + x_2)$

$\ldots$

$s_k \coloneqq s_{k-1} + x_2 \ \ (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$

$\ldots$

x_n disebut dengan suku-suku dari deret, dan s_k disebut **jumlahan parsial *(partial sum)*.** Jika $lim\, S$ ada, maka deret S dikatakan konvergen dan nilai limitnya adalah hasil dari jumlahan deret. Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan deret S divergen.

Deret tak berhingga S yang dibangun oleh barisan $X \coloneqq (x_n)$ disimbolkan dengan

$$\sum (x_n) \quad atau \sum x_n \quad atau \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Selanjutnya, diberikan kondisi-kondisi yang dapat memberikan jaminan bahwa suatu deret itu konvergen.

B. Beberapa Teorema

Teorema B.14.1: $(uji\ suku\ ke-n)$ Jika deret $\sum x_n$ konvergen, maka $lim(x_n) = 0.$

Bukti: Menggunakan $Definisi\ A.14.1$, $\sum \mathrm{x_n}$ konvergen apabila $lim(s_k)$ ada. Karena $x_n = s_n - s_{n-1}$ maka $lim(x_n) = lim\,(s_n) - lim\, s_{n-1} = 0$.

Teorema B.14.2:($Kriteria\ Cauchy$**)** Deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka
$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon$.

Teorema B.14.3: Misalkan (x_n) barisan bilangan real nonnegatif. Maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan $S = (s_k)$ dari jumlahan parsialnya terbatas. Dalam hal ini,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = lim(s_k) = \sup\{s_k : k \in N\} .$$

Bukti:

Karena $x_n > 0$, maka barisan jumlahan parsial S increasing monoton, yaitu
$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq \cdots$.

Menggunakan $teorema\ B.10.1$, barisan $S = (s_k)$ konvergen jika dan hanya jika barisannya terbatas, dalam hal ini limitnya sama dengan $\sup\{S_k\}$.

Teorema B.14.4: $(uji\ perbandingan)$ Diberikan barisan bilangan real $X := (x_n)\ dan\ Y := (y_n)$ dan misalkan untuk suatu $K \in N$ berlaku $0 \leq x_n \leq y_n$ untuk $n \geq K$.

(i) Jika $\sum y_n\ konvergen,$ maka $\sum x_n\ konvergen.$

(ii) Jika $\sum x_n\ divergen,$ maka $\sum y_n\ divergen.$

Bukti:

(i) Misalkan $\sum y_n$ konvergen. Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $M(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka $y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon$ Jika $m > \max\{K, M(\varepsilon)\}$, maka diperoleh bahwa

$$0 \leq x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon,$$

yang berakibat bahwa $\sum x_n$ konvergen.

(ii) Menggunakan $kontraposisi$ dari (a), maka teorema terbukti.

Teorema B.14.5: $(\boldsymbol{Uji\ perbandingan\ limit})$ *Misalkan* $X := (x_n)$ barisan increasing positif $strictly$ dan misalkan limit berikut ada dalam R, yaitu

$$r := \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

(i) Jika $r \neq 0$, maka $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum y_n$ konvergen

(ii) Jika $r = 0$, maka $\sum y_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum x_n$ konvergen.

Bukti:

(i) Diketahui $r := \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dari soal latihan 8(no.18), maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk $n \geq K$ berlaku $\frac{1}{2}r \leq \frac{x_n}{y_n} \leq 2r$, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1}{2}r\right)y_n \leq x_n \leq (2r)y_n.$$

Menggunakan $uji\,perbandingan$ $B.14.4$ dua kali, maka pernyataan (a) terbukti.

(ii) Jika $r = 0$ maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk $n \geq K$ berlaku $0 < x_n \leq y_n$.

Menggunakan $teorema\,B.14.5(a)$, maka pernyataan (b) terbukti.

C. Contoh-Contoh

Contoh C.14.1

(a) *Diberikan barisan* $X := (r^n)_{n=0}^{\infty}$ *dengan* $r \in R$ *yang membangun* deret:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^2 + \cdots$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $|r| < 1$ maka deret ini konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$.

Misalkan $s_n := 1 + r + r^2 + \cdots + r^2 + \cdots$ untuk ≥ 0 , dan jika s_n dikalikan dengan r dan mengurangkan hasilnya dari s_n, maka diperoleh,

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

Dengan demikian,

$$\left|s_n - \frac{1}{1-r}\right| \le -\frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}$$

Karena $|r|^{n+1} \to 0$ saat $|r| < 1$, maka deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ $konvergen$ ke $\frac{1}{(1-r)}$ saat $|r| < 1$

(b) *Tinjaulah hasil dari* $((-1)^n)_{n=0}^{\infty}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = (+1) + (-1) + (+1) + (-1) + \cdots.$$

Ini mudah dilihat (dengan Induksi Matematika) $s_n = 1$ jika $n \ge 0$ adalah genap dan $s_n = 0$ jika n ganjil;

oleh karena itu, deret dari jumlah parsial adalah $(1,0,1,0,..)$. Karena barisan ini $tidak\ konvergen$, berarti deret $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ adalah $divergen$.

(c) *Tinjaulah deret*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots.$

Mengingat, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Oleh karena itu, jumlah suku-suku dari $k = 1$ ke $k = n$ didapat

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

Dimana $s_n \to 1$. Oleh karena itu deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergen ke 1.

Contoh C.14.2:

(a) Deret geometrik ($Contoh\ C.14.1$) $divergen$ jika $|\mathrm{r}| \geq 1.$

Ini merupakan fakta bahwa r^{n} tidak mendekati 0 karena $|\mathrm{r}| \geq 1.$

(b) Deret $Harmonik$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $divergen.$

Karena suku $1/n \to 0$ tidak dapat menggunakan $Teorema\ B.14.1$ $(uji\ suku\ ke-n)$ berarti $divergen.$ Namun, itu terlihat pada Contoh $C.10.2(b)$ dan $C.12.2(\mathrm{c})$ bahwa deret $(\mathrm{s_n})$ tidak terbatas. Oleh karena itu $teorema\ B.14.3$ bahwa $harmonik\ divergen.$ Contoh $\mathrm{C}.10.2(\mathrm{b})$ dan juga bisa untuk berbagai bukti divergensinya.

$$\mathrm{S} = (1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + \cdots + \cdots (\frac{1}{2\mathrm{n}-1} + \frac{1}{2\mathrm{n}}) + \ldots$$

$$> (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + \ldots + \cdots (\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = S$$

Kontradiksi $S > S$ menunjukkan asumsi konvergensi harmonik menyimpang.

(c) $2 - Deret$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $konvergen$

Karena jumlahan parsialnya monoton, maka cukup ditunjukkan bahwa subbarisan (s_k) terbatas.

Jika $k_1 := 2^1 - 1 = 1,$ maka $s_{k_1} = 1$. Jika $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, maka

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2},$$

dan jika $k_3 := 2^3 - 1 = 7$, maka diperoleh

$$s_{k_3} = s_{k_2}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

Menggunakan $induksi\ matematika$, diperoleh bahwa jika $k_j := 2^j - 1$, maka

$$0 < s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$

Karena ruas kanan merupakan jumlahan parsial dari deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}$ maka $\lim(s_k) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2$. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $konvergen$.

(d) $p - deret$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *konvergen untuk* $p > 1$.

Karena argumennya sangat mirip dengan kasus khusus yang (c).

Jika $k_1 := 2^1 - 1 = 1$, maka $s_{k1} = 1$. Jika $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, maka $2^p < 3^p$.

$$s_{k2} = \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^p}.$$

Lebih lanjut, jika $k_3 := 2^3 - 1$, maka (bagaimana?) Terlihat bahwa

$$s_{k3} < s_{k2}\ \frac{1}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}.$$

Akhirnya $r := 1/2^{p-1}$; maka $p > 1$ memiliki $0 < r < 1$. Menggunakan Induksi Matematika, dapat ditunjukkan bahwa jika $k_j := 2^p - 1$, maka :

$$0 < s_{kj} < 1 + r + r^2 + \cdots r^{j-1} < \frac{1}{1-r}.$$

Oleh karena itu, teorema B.14.3 mengimplikasikan bahwa $\mathrm{p} - \mathrm{deret}$ konvergen ketika $\mathrm{p} > 1$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergen $0 < p \leq 1$.

Digunakan ketidaksamaan dasar $n^p \leq n$ bila $n \in N$ dan $0 < p \leq 1$.

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \text{ untuk } n \in N.$$

Karena jumlah parsial dari harmonik tidak terbatas, ketidaksamaan ini menunjukkan bahwa jumlah parsial $p - \text{deret}$ tidak terbatas ketika $0 < p \leq 1$. Oleh karena itu $p - \text{deret}$ divergen untuk nilai-nilai ini dari p.

Contoh C.14.3: Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ konvergen.

Diketahui ketaksamaan berikut benar

$0 < \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ *untuk* $n \in N$.

Karena telah diketahui bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka menggunakan $uji\ perbandingan\ limit\ B.14.5$ diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ konvergen.

Contoh C.14.4

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ *konvergen*

Jelas bahwa ketidaksamaan

$0 < \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ untuk $n \in N$ adalah benar

Maka $\sum 1 / n^2$ adalah konvergen (oleh Contoh C.14.2), kita dapat menerapkan uji perbandingan limit $B.14.5$ untuk mendapatkan konvergensi yang diberikan.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ *adalah konvergen*

Jika ketidaksamaan

$$\frac{1}{n^2-n+1} < \frac{1}{n^2} \qquad (14.1)$$

benar, maka bisa didiskusikan seperti pada (a).

Namun, (14.1) salah untuk semua $n \in N$. Pembaca mungkin bisa menunjukkan ketidaksamaan itu.

$$0 < \frac{1}{n^2-n+1} \leq \frac{2}{n^2}$$

berlaku untuk semua $n \in N$, dan ketidaksamaan ini juga akan berfungsi. Namun, mungkin diperlukan beberapa eksperimen untuk memikirkan ketidaksamaan semacam itu dan kemudian membangunnya. Sebaliknya, jika kita mengambil $x_n = 1/(\, n^2 - n + 1)$ dan $y_n = 1/n^2$ maka dihasilkan

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n^2-n+1} = \frac{1}{1-(1/n)+(1/n^2)} \rightarrow 1$$

Oleh karena itu, konvergensi dari deret yang diberikan mengikuti uji perbandingan limit $B.14.5(\mathrm{a})$.

(c) *Deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ *adalah divergen.*

Deret $\sum 1/\sqrt{n}$ merupakan $p-$deret dengan $p = \frac{1}{2}$ contoh $C.14.2(e)$ adalah divergen. Jika $x_n := 1/\sqrt{n+1}$ dan $y_n := 1/\sqrt{n}$ memiliki:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \rightarrow 1.$$

Oleh karena itu, uji perbandingan limit $B.14.5(\mathrm{a})$ berlaku.

(d) *Deret* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *adalah konvergen.*

Adalah mungkin untuk membangun konvergensi ini dengan menunjukkan (Induksi matematika) bahwa $n^2 < n!$ untuk $n \geq 4$.

0< $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$ untuk $n \geq 4$.

Jika x $:= 1/n!$ dan $y_n := 1/n^2$ maka $n \geq 4$

0 $\leq \frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n!} = \frac{n}{1.2\ldots(n-1)} < \frac{1}{n-2} \to 0.$

Oleh karena itu, uji perbandingan limit $B.14.5(b)$ berlaku. (Perhatikan bahwa uji ini agak merepotkan untuk diterapkan karena kita saat ini tidak mengetahui konvergensi dari setiap deret yang mana limit (x_n/y_n) sangat mudah untuk ditentukan.)

D. Latihan 14

1. Misalkan $\sum a_n$ mempunyai deret dan $\sum b_n$ merupakan deret dimana suku-sukunya sama dan dalam urutan yang sama seperti $\sum a_n$ kecuali bahwa suku dari $a_n = 0$. Tunjukkan bahwa $\sum a_n$ kovergen ke A jika dan hanya jika $\sum b_n$ konvergen ke A.
2. Tunjukkan bahwa konvergensi suatu deret tidak terpengaruh dengan mengubah sejumlah terhingga suku-sukunya. (Tentu saja, nilai dari jumlah tersebut dapat diubah)
3. Dengan menggunakan pecahan parsial, tunjukkan bahwa
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha} > 0$ jika $\alpha > 0$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)(n+2)} = \frac{1}{4}$
4. Jika $\sum x_n$ dan $\sum y_n$ kovergen maka $\sum (x_n + y_n)$ adalah $kovergen.$

5. Dapatkah anda memberikan contoh dari deret konvergen $\sum x_n$ dan divergen $\sum y_n$ sedemikian hingga $\sum(x_n + y_n)$ adalah kovergen? Jelaskan!
6. (a) hitunglah nilai dari $\sum_{n=2}^{\infty}(2/7)^n$ (Perhatikan deret dimulai pada $n = 2.$)

   (b) hitunglah nilai dari $\sum_{n=1}^{\infty}(1/3)^{2n}$ (Perhatikan deret dimulai pada $n = 1.$)
7. Temukan rumus untuk deret $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$ ketika $|r| < 1.$
8. Misalkan $r_1, r_2 \ldots . r_n \ldots$ adalah penghitungan bilangan rasional dalam interval [0,1]. (Lihat [13]) Untuk tertentu $\varepsilon > 0$, beri interval panjang ε^n tentang bilangan rasional r_n untuk $n = 1,2,3 \ldots$ dan tentukan jumlah total panjang semua Interval, evaluasi angka ini untuk $\varepsilon = 0.1 \text{ dan } \varepsilon = 0.01.$
9. (a) Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ adalah divergen

   (b) tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos n)/n^2$ adalah konvergen
10. Gunakan argumen yang mirip dengan yang ada pada Contoh $C.14.3$ (f) untuk menunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ adalah konvergen
11. Jika $\sum a_n$ dengan $a_n > 0$ adalah konvergen, maka $\sum a_n{}^2$ selalu konvergen? Entah membuktikannya atau memberikan sebuah contoh penyangkal.
12. Jika $\sum a_n$ dengan $a_n > 0$ adalah konvergen maka $\sum \sqrt{a_n}$ selalu konvergen? Entah membuktikannya atau memberikan sebuah tandingan.

13. Jika $\sum a_n$ dengan $a_n > 0$ adalah konvergen maka $\sqrt{a_{n\, a_n+1}}$ selalu $konvergen$? Entah membuktikannya atau memberikan sebuah contoh penyangkal.

14. Jika $\sum a_n$ dengan $a_n > 0$ adalah $konvergen$ dan jika $b_n := (a_1 + \cdots + a_n/n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ maka tunjukkan bahwa, $\sum b_n$ selalu $divergen$.

15. Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ sedemikian hingga $(a(n))$ adalah barisan $decreasing$ dari bilangan $strictly\ positif$. Jika $s\,(n)$ menyatakan jumlah parsial n, tunjukkan (dengan mengelompokkan suku dalam $s\,(2^n)$ dalam dua cara berbeda) bahwa $\frac{1}{2}\big(a(1)\big) + 2a(2) + \cdots + 2^n a(2^n)) \leq s(2^n) \leq (a(1) + 2a(2) + \cdots + 2^{n-1}\, a(2^{n-1})) + a(2^n)$. Gunakan ketidaksamaan ini untuk menunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, a(2^n)$ konvergen. Hasil ini seringkali disebut uji kondensasi cauchy; uji ini sangat kuat.

16. Gunakan $uji\ kondensasi\ cauchy$ untuk membahas p-deret $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^n)$ untuk $p > 0$.

17. Gunakan uji kondensasi cauchy untuk menetapkan divergensi deret berikut:

    (a) $\sum \frac{1}{n\text{In } n}$

    (b) $\sum \frac{1}{n\ (\text{In } n)(\text{In In } n)}$

    (c) $\sum \frac{1}{n\ (\text{In } n)\ (\text{In In } n)(\text{In In In } n)}$

18. Tunjukkan bahwa jika $c > 1$, maka deret berikut ini konvergen:

    (a) $\sum \frac{1}{n(\text{In } n)^c}$

    (b) $\sum \frac{1}{n(\text{In } n)(\text{In In } n)^c}$

DAFTAR BACAAN

[1] Apostol, TM, (1991). ***Mathematical Analysis,*** Massachusetts: Addison-Wesley Publising Co.

[2] Bartle R. G. and Sherbert D. R. (1982). ***Introduction to Real Analysis***, New York: John Wiley & Sons.

[3] Bartle R. G. and Sherbert D. R. (1991). ***Introduction to Real Analysis,*** New York: John Wiley & Sons.

[4] Bartle R. G. and Sherbert D. R. (2011). ***Introduction to Real Analysis,*** New York: John Wiley & Sons.

[5] Bartle R. G. (1975). ***The Elements of Real Analysis***, New York: John Wiley & Sons.

[6] Binmore, K.G. (2001). **Mathematical Analysis**: A Straightforward Approach. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

[7] E. Hutahaean, (1980), ***Fungsi Riil,*** Penerbit: ITB Bandung.

[8] Giles, JR., (1973), ***Real Analysis (An Introductory Course)***, Sydney: John Wiley & Sons.

[9] Goldberg, RR., (1973), ***Methods of Real Analysis***, Calcuta: Oxford and IBH Publishing.

[10] Ross, K.A. (2013). **Elementary Analysis**. New York: Springer Science + Business Media

[11] Seymour, L., (1981). ***Theory and Problem of General Topologi,*** Schaum's Outline Series, Singapore.

[12] Soedjadi R dan Yusuf Fuad. (1994). ***Analisis Real I*** (Hand Out), Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Surabaya.

[13] Steven R. Lay, (1986), ***Analysis An Introduction to Proof,*** New Jersey: Prentice-Hall.

[14] S.L. Gupta and Nisha Rani (1989), ***Fundamental Real Analysis,*** New Delhi: Vikas Publishing House PVT.

[15] Widodo, S. dan Katminingsih, Y. (2017) ***Pengantar Dasar Matematika***, Kediri: Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri.

Tentang Penulis

Suryo Widodo, lahir tahun 1964, di Kediri Jawa Timur. Mengenyam pendidikan tinggi: S–1 program studi pendidikan matematika IKIP PGRI Kediri (1988), S–2 program studi pendidikan matematika IKIP Negeri Surabaya (1999), dan S–3 program studi pendidikan matematika Unesa Surabaya (2015).

Menjadi guru di SMA Sekartaji Plosoklaten Kediri (1986–1991); Dosen Universitas Nusantara PGRI Kediri sejak 1988 sampai sekarang dengan jabatan akademik Lektor Kepala; Asesor sertifikasi guru (2007–2012) Rayon 43 UNP Kediri; Instruktur Nasional Kurikulum tahun 2013. Menjabat sebagai Sekretaris jurusan pendidikan ma tematika IKIP PGRI Kediri (1988-1996); Ketua jurusan pendidikan matematika IKIP PGRI Kediri (1996); Ketua Sekolah Tinggi Teknik PGRI Kediri (2001–2007); Dekan Fakultas Teknik Universitas Nusantara PGRI Kediri (2007–2011; 2015 s.d. sekarang).

Yuni Katminingsih, lahir tahun 1970, di Kediri Jawa Timur.
S–1 program studi pendidikan matematika IKIP PGRI Kediri (1993), S–2 program studi teknologi pembelajaran Unipa Surabaya (2007).
Pekerjaan: Guru SMP Negeri Tarokan 1 (1993–2000); Guru SD Negeri Kerep (2001–2007); Dosen UNP Kediri sejak 2007 sampai sekarang.

Pengantar analisis real

Buku ini salah satu dari buku analisis matematika yang diberi judul pengantar analisis real.
Bagian pertama: dimulai dari sistem bilangan real yang diawali dengan aksioma kesamaan, aksioma field, memunculkan ketidaksamaan dari aksioma urutan, menurunkan sifat kepadatan dari aksioma kelengkapan. Serta beberapa konsep topologi bilangan real diantaranya dekat dengan, neighborhood, batas atas, batas bawah suatu himpunan.
Bagian kedua: dimulai dari diklasifikasi barisan bilangan real menurut eksistensi batasnya, arah kecenderungannya, kedudukan antar anggotanya, serta sifat khusus lainnya, meliputi: barisan dan limit barisan, kekonvergenan, barisan monoton, sub-barisan dan teorema Bolzano-Weierstrass, barisan Cauchy, barisan divergen sejati dan pengantar deret takhingga.

YAYASAN PEMBINA LEMBAGA PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI PGRI KEDIRI
UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI
PROGRAM PASCASARJANA
Status "Terakreditasi"
SK. BAN PT No: 718/SK/BAN-PT/Akred/PT/VII/2015 Tanggal 10 Juli 2015
Jl. K.H. Achmad Dahlan No. 76 Telp : (0354) 771576, 771503, 771495 Kediri

SURAT TUGAS

Nomor:219/A/PPs-UN PGRI Kd/III/2020

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dr. M. Muchson, M.M
NIDN : 196712181992030002
Jabatan : Direktur Pascasarjana

menugaskan kepada:

Nama : Dr. Suryo Widodo, M.Pd.
NIDN : 0002026403
Jabatan : Dosen
Prodi : Magister Keguruan Olahraga

Untuk melaksanakan kegiatan pengajuan pembuatan Hak Cipta Buku Ajar dengan judul: **"Pengantar Analisis Real"** sebagai Pencipta 1.

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dilaksanakan dengan penuh tanggung jawab. Atas perhatian dan kerjasamanya disampaikan terimakasih.

Kediri, 10 Maret 2020
Direktur PPs,

UNIVERSITAS NUSANTARA PGRI KEDIRI

Dr. M. Muchson, M.M

REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN

CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00202009947, 12 Maret 2020
Pencipta		
Nama	:	**Dr. Suryo Widodo, M.Pd, Yuni Katminingsih, S.Pd., M.Pd,**
Alamat	:	Dusun Kerep, RT/RW: 004/001, Desa Kerep, Kecamatan Tarokan, Kabupaten Kediri, Jawa Timur, 64152
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Universitas Nusantara PGRI Kediri**
Alamat	:	Jl. K.H. Ahmad Dahlan No. 76 Kecamatan Mojoroto, Kota Kediri, Jawa Timur, 64112
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Pengantar Analisis Real**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	17 Mei 2001, di Kota Kediri
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak Ciptaan tersebut pertama kali dilakukan Pengumuman.
Nomor pencatatan	:	000183033

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001